

Аналітичну геометрію в 10-А!

Не поискать ли мне тропы иной,
приемов новых, сочетаний странных.

В. Шекспир

1. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC побудовано квадрат зовнішнім чином. Знайдіть відстань від вершини C прямого кута до центра Q квадрата, якщо довжини катетів BC і AC дорівнюють a і b .
2. Доведіть теорему Лейбніца. Нехай M — довільна точка площини, G — центроїд трикутника ABC . Тоді виконується тотожність

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

3. Запам'ятайте теорему Лейбніца.
4. Доведіть теорему Гауса. Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точках E і F . Тоді середини відрізків AC , BD і EF лежать на одній прямій.
5. Запам'ятайте теорему Гауса.
6. Є прямий кут з вершиною в точці A і число $a > 0$. Знайдіть ГМТ середин відрізків CD таких, що точки C і D лежать на різних сторонах кута, і CD дорівнює заданій величині a .
7. Точки A_1, B_1, C_1 є проєціями вершин трикутника ABC на деяку пряму l . Доведіть, що прямі, які проходять через точки A_1, B_1, C_1 перпендикулярно BC, CA, AB відповідно, перетинаються в одній точці.
8. На висоті CD трикутника ABC довільно обрали точку P . Прямі AP і BP перетинають відповідно прямі BC і AC в точках E і F . Доведіть, що $\angle FDC = \angle EDC$.
9. Є кут з вершиною в точці A і деяка точка B . Довільне коло, що проходить через точки A і B перетинає сторони кута в точках C і D (відмінних від A). Знайдіть ГМТ центроїдів трикутників ACD .
10. Через точку перетину двох кіл проведена пряма, яка вдруге перетинає кола в точках A і B . Знайти ГМТ середин відрізків AB .
11. Через ортоцентр трикутника провели дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що середини відрізків, які витинаються цими прямими на сторонах трикутника (або на прямих, що містять сторони трикутника), лежать на одній прямій.

Кожен має здати мені розв'язки двох задач на вибір на листочку.