

Заняття 9.10.2010, Технічний ліцей, 10-й клас. Підготовка до командної олімпіади.

1. Із деякої точки M , що лежить усередині даного кута з вершиною A , опущено перпендикуляри MP та MQ на сторони кута. Із точки A опущено перпендикуляр AK на відрізок PQ . Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.
2. Скільки є способів поставити на шахову дошку вісім тур так, щоб вони не били одна одну?
3. Доведіть, що якщо m та n взаємно прості (не мають жодного спільного дільника, крім одиниці), то числа $n, 2n, 3n, \dots, (m-1)n, mn$ дають попарно різні остачі при діленні на m .
4. Для додатних a та b доведіть нерівності між середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним та середнім гармонічним двох чисел: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Сформулюйте аналогічні нерівності для трьох чисел.
5. Доведіть нерівність для додатних x, y та z : $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 8$.