

Домашнее задание 16.03.14

1. Последовательность a_n положительных чисел такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) = 2.$$

Найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

2. Последовательность a_n стремится к a при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a.$$

3. Дана последовательность a_n такая, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

4. Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

5. Придумайте ограниченную последовательность a_n , не имеющую предела, такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1.$$

6. Натуральный ряд разбит на n непересекающихся арифметических прогрессий с разностями r_1, \dots, r_n . Докажите, что

$$\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_n} = 1.$$

7. Вычислить предел последовательности

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

8. Вычислить предел последовательности

$$a_n = \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{k!}.$$

9. Предположим, что для последовательности a_n существует $\alpha < 1$ такое, что

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \alpha |a_n - a_{n-1}|.$$

Докажите, что последовательность a_n сходится.