

Графи на подумати

Лема про рукостискання. У будь-якому графі кількість непарних вершин — парна. (Подумайте ще раз, чому це так.)

1. Чи можна намалювати на площині 9 відрізків так, щоб кожен перетинався рівно з трьома іншими?
2. В групі людей у будь-якої людини є один друг і один ворог. Довести, що а) кількість людей у групі парна; б) групу можна розбити на дві нейтральні підгрупи.
3. У місті з будь-якої станції метро можна проїхати на будь-яку іншу. Довести, що одну із станцій можна закрити на ремонт без права проїзду через неї так, щоб з довільної станції, що залишилися, можна було проїхати в будь-яку іншу.
4. У деякій країні будь-які два міста з'єднані або авіалінією, або залізницею. Довести, що можна вибрати вид транспорту так, щоб з кожного міста можна було дістатися в будь-яке інше місто, користуючись лише цим видом транспорту.
5. У деякому місті від кожної площі відходить рівно 5 вулиць, що з'єднують площі. Довести, що кількість площ — парна, а кількість вулиць ділиться на 5.
6. У країні будь-які два міста з'єднані дорогою з одностороннім рухом. Довести, що існує місто, з якого можна проїхати в будь-яке інше не більш, ніж по двом дорогам.