

$$НСК(a, b) = c$$

$НСД(a, b) = d$ де числа c і d натуральні та:

c - найменше таке число, що ділиться націло на числа a і b ;

d - найбільше таке число, що ділить націло числа a і b .

НСК-читається як «найменше спільне кратне»;

НСД-читається як «найбільший спільний дільник».

Задачі

1. Числа a_1, a_2, \dots, a_n такі, що $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1$; $a_2 \leq a_3 \leq 2a_2$; ... ; $a_{n-1} \leq a_n \leq 2a_{n-1}$. Доведіть, що в сумі $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ можна так вибрати знаки, щоб було $0 \leq s \leq a_1$.
2. Доведіть, що будь-яке натуральне число, що не перевищує $n!$, можна подати як суму не більше n доданків, серед яких нема двох однакових і кожен є дільником числа $n!$.
3. Доведіть, що рівняння $x^2 + x + 1 = py$ має розв'язання в цілих числах (x, y) для нескінченної кількості простих чисел p .
4. Розв'язати в натуральних числах рівняння: $x + y^{10} = НСК(x, y)$.
5. У волейбольному турнірі(тобто в турнірі нема нічьїх), що склався з 9 турів, прийняло участь 10 команд. В кожному турі команди розбивались деяким чином на 5 пар і команди з однієї пари грали між собою (при цьому жодні дві команди не грали один проти одного більше одного разу). Команда «Лузер» після 5 туру займала чисте друге місце (тобто мала менше перемог ніж одна з команд і більше – ніж всі інші). Довести, що по закінченню турніру вона не могла зайняти чисте останнє місце.
6. На концерт прийшли 125 людей, причому кожен знайомий рівно з 10 іншими. На перерві деякі слухачі пішли. Виявилось, що всі, хто лишились, мають, знову ж таки, однакову кількість знайомих. Доведіть, що серед тих, хто пішов, були деякі знайомі один з одним.
7. Є натуральні числа a, b, c . Доведіть нерівність: $НСД(a, b) + НСД(a, b + c) \leq a + c$.
8. Дано n різних натуральних чисел. На дошку виписали їх попарні найбільші спільні дільники та найменші спільні кратні (тобто для будь-яких чисел a і b з дошки виписали їх найменше спільне кратне і їх найбільший спільний дільник). Яка найменша кількість різних чисел може бути виписана на дошці?