

Заняття 26.04.2010, Технічний ліцей, 9-й клас. Допоміжні розфарбування.

1. Доведіть, що дошку завбільшки 10×10 клітинок не можна розрізати на фігурки в формі літери «Т», що складаються з чотирьох клітинок.
2. У кожній з клітинок дошки 9×9 сидить жук. Почувши команду, кожен жук переповзає на сусідню щодо діагоналі клітинку. При цьому на деяких клітинках може опинитися два чи більше жуків, а деякі клітинки виявляться незайнятими. Доведіть, що незайнятих клітинок буде щонайменше 9.
3. У лівий нижній кут шахової дошки (завбільшки 8×8) поставлено й розставлено у формі квадрата 3×3 дев'ять фішок. Фішка може стрибати на вільне поле через фішку, що стоїть поряд, тобто «симетрично відобразитися» відносно її центра (стрибати можна вертикально, горизонтально й діагонально). Чи можливо за деяку кількість таких ходів поставити всі фішки знов у формі квадрата 3×3 , але в іншому куті: а) лівому верхньому, б) правому верхньому?
4. Грані куба $9 \times 9 \times 9$ розбито на одиничні клітинки. Куб заклеєний без накладень паперовими смужками 2×1 (сторони смужок ідуть уздовж сторін клітинок). Доведіть, що кількість зігнутих смужок непарна.
5. Кожна сторона рівностороннього трикутника розбита на n рівних частин. Через точки поділу проведено прямі, що паралельні до сторін. У такий спосіб трикутник розбито на n^2 маленьких трикутничків. Назвемо ланцюжком послідовність трикутничків, у якій жоден не з'являється двічі й кожен наступний має спільну сторону з попереднім. Якою є максимальна можлива кількість трикутничків у ланцюжку?