

## Тренувальна олімпіада

1. Дано набір натуральних чисел  $a_1, \dots, a_k$ . Нехай  $b_i$  — кількість чисел першого набору, які є не меншими за  $i$ . Доведіть, що сума чисел першого набору дорівнює сумі чисел другого.
2. Відомо, що рівняння  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  має корені  $x_0$  і  $x_1$ , а рівняння  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  має корені  $x_0$  і  $x_2$ . Знайдіть корені рівняння

$$x^2 + \frac{p_1 + p_2}{2}x + \frac{q_1 + q_2}{2} = 0.$$

3. В деякій країні є декілька міст, які з'єднані платними дорогами з двустороннім рухом. Вартість проїзду по всім дорогам різна. В рамках соціальної програми "Пакращення життя вже сьогодні" відповідний департамент Міністерства транспорту створив список усіх шляхів, які проходять через кожне місто рівно по одному разу, і відмітив найдорожчу дорогу кожного шляху зі списку, а уряд постановив закрити усі відмічені хоча б раз дороги. Виявилось, що є три міста, які не з'єднані між собою шляхами. Доведіть, що команда професіоналів виконала доручення Президента неправильно.
4. Вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$  та  $AC$  в точках  $K$  і  $L$ . Бісектриса кута  $C$  перетинає пряму  $KL$  в точці  $X$ . Доведіть, що  $\angle BXC = 90^\circ$  та точка  $X$  належить середній лінії трикутника  $ABC$  проведеної паралельно до  $AC$ .
5. Довести, що рівняння  $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2$  має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах, якщо найбільший спільний дільник чисел  $a, b, c$  дорівнює 1.

## Тренувальна олімпіада

1. Дано набір натуральних чисел  $a_1, \dots, a_k$ . Нехай  $b_i$  — кількість чисел першого набору, які є не меншими за  $i$ . Доведіть, що сума чисел першого набору дорівнює сумі чисел другого.
2. Відомо, що рівняння  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  має корені  $x_0$  і  $x_1$ , а рівняння  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  має корені  $x_0$  і  $x_2$ . Знайдіть корені рівняння

$$x^2 + \frac{p_1 + p_2}{2}x + \frac{q_1 + q_2}{2} = 0.$$

3. В деякій країні є декілька міст, які з'єднані платними дорогами з двустороннім рухом. Вартість проїзду по всім дорогам різна. В рамках соціальної програми "Пакращення життя вже сьогодні" відповідний департамент Міністерства транспорту створив список усіх шляхів, які проходять через кожне місто рівно по одному разу, і відмітив найдорожчу дорогу кожного шляху зі списку, а уряд постановив закрити усі відмічені хоча б раз дороги. Виявилось, що є три міста, які не з'єднані між собою шляхами. Доведіть, що команда професіоналів виконала доручення Президента неправильно.
4. Вписане коло трикутника  $ABC$  дотикається до сторін  $AB$  та  $AC$  в точках  $K$  і  $L$ . Бісектриса кута  $C$  перетинає пряму  $KL$  в точці  $X$ . Доведіть, що  $\angle BXC = 90^\circ$  та точка  $X$  належить середній лінії трикутника  $ABC$  проведеної паралельно до  $AC$ .
5. Довести, що рівняння  $a^3 + b^3 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2$  має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах, якщо найбільший спільний дільник чисел  $a, b, c$  дорівнює 1.