

Финальная подборка

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. Даны положительные числа a, b, c такие, что $ab + bc + ca = 3$. Докажите неравенство

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 9.$$

Задача 2.

Задача 3. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) отмечены середины диагоналей AC, BD — точки P, Q соответственно. Докажите, что если $\angle ABP = \angle CBD$, то $\angle BCQ = \angle ACD$.

Задача 4. Известно, что $\angle BAC$ наименьший среди углов треугольника ABC . Пусть U — точка дуги BC описанной окружности ABC , которая не содержит A . Середины перпендикуляры отрезков AB и AC пересекают AU в V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в T . Докажите, что $AU = TB + TC$.

Задача 5. К натуральному числу $a > 1$ приписали это же число и получили число b , которое делится на a^2 . Найдите все возможные значения $\frac{b}{a^2}$.

Задача 6. Палиндром — это натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево. Найдётся ли 2016 пар вида $(n, n + 110)$, где оба числа — палиндромы?

Задача 7. Найти все пары натуральных чисел m, n таких, что

$$\frac{n^3 + 1}{mn + 1}$$

является целым.

Задача 8. В банке работают 2002 сотрудника. Вс сотрудники пришл на юбилей, и их рассадили за один круглый стол. Известно, что зарплаты сидящих рядом различаются на 2 или 3 доллара. Какой наибольшей может быть разница двух зарплат сотрудников этого банка, если известно, что все зарплаты сотрудников различны?

Задача 9. На плоскости синим и красным цветом окрашено несколько точек так, что никакие три точки одного цвета не лежат на одной прямой (точек каждого цвета не меньше трех). Докажите, что какие-то три точки одного цвета образуют треугольник, на трех сторонах которого лежит не более двух точек другого цвета.