

## Дополнительные построения - 2

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

**Упражнение 1.** Докажите, что если в трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей равна квадрату суммы оснований.

**Упражнение 2.** Дана окружность  $\omega$  и точка  $P$  вне её. Из  $P$  проведены касательные  $PA$  и  $PB$  к  $\omega$ . Прямая, проходящая через  $P$  пересекает  $\omega$  в двух точках  $C$  и  $D$ . Отметим середину  $CD$  — точку  $M$ . Докажите, что  $\angle AMP = \angle BMP$ .

**Задача 1.** Известно, что стороны треугольника  $ABC$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{BC}{AB - BC} = \frac{AB + BC}{AC}.$$

Найдите частное  $\angle A : \angle C$ .

**Задача 2.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$   $AB = BD$ ,  $\angle ABD = \angle DBC$ . На диагонали  $BD$  отметили точку  $K$ , для которой  $BK = BC$ . Докажите, что  $\angle KAD = \angle KCD$ .

**Задача 3.** (Точка Торричелли) Дан треугольник  $ABC$ , в котором все углы меньше  $120^\circ$ . Докажите, что среди всех точек  $X$  внутри треугольника величина  $AX + BX + CX$  будет наименьшей для точки  $T$ , из которой все стороны треугольника видны под углом в  $120^\circ$ .

**Задача 4.** В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 60^\circ$ . Внутри него выбрана точка  $T$ , такая что  $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA$ . Пусть  $M$  — середина  $BC$ . Докажите, что  $TA + TB + TC = 2AM$ .

**Задача 5.** Дан правильный треугольник  $ABC$  и точка  $D$  на дуге  $BC$  его описанной окружности. Докажите, что  $AD = DB + DC$ .

**Задача 6.** Дан треугольник  $ABC$ . Внешняя биссектриса угла  $\angle B$  пересекает  $AC$  в  $P$ . Пусть  $I$  — инцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что если  $AP + AB = CB$ , то  $API$  — равнобедренный.

**Задача 7.** Дан правильный треугольник  $ABC$ . Окружность  $\omega$  проходит через вершины  $B$  и  $C$ . На  $\omega$  взята точка  $D$  такая, что  $BC = BD$ . Отрезок  $AD$  пересекает  $\omega$  во второй раз в точке  $E$ . Докажите, что отрезок  $AE$  равен радиусу  $\omega$ .

**Задача 8.** Отрезок  $AD$  — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне  $BC$ , которая пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Докажите, что периметр треугольника  $DEF$  в два раза больше стороны  $BC$ .

**Задача 9.** Дан параллелограмм  $ABCD$  и точка  $P$  такая, что  $\angle PAD = \angle PCD$ . Докажите, что  $\angle PBC = \angle PDC$ .

**Задача 10.** Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = BC$ ). Известно, что  $\angle ABC = 82^\circ$ . Пусть  $M$  — такая точка внутри треугольника, для которой  $AM = AB$  и  $\angle MAC = 11^\circ$ . Найдите  $\angle MCB$ .

**Задача 11.** Внутри равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  с гипотенузой  $AB$  взята точка  $M$  такая, что угол  $MAB$  на  $15^\circ$  больше угла  $MAC$ , а угол  $MCB$  на  $15^\circ$  больше угла  $MBC$ . Найдите угол  $BMC$ .