

Задачі для підготовки до каруселі, молодша ліга

1. Чому дорівнює «ПЛАТА» в наведеному ребусі, який записано в семиричній системі числення: «ТОРТ+ТОРТ+ТОРТ=ПЛАТА»?
2. Перед забігом 6 спортсменів А, Б, В, Г, Д, Е три експерти висловили свої прогнози: АБВГДЕ, АВБЕДГ, ВДЕАГБ. Перший вгадав три номери з шести, але не вгадав жодної пари бігунів, які фінішували послідовно. Другий не вгадав жодного місця, а третій угадав одне місце. В якому порядку фінішували спортсмени?
3. За круглим столом сидять 12 аборигенів, кожний з яких є або брехуном (завжди каже неправду), або лицарем (завжди каже правду). Кожен сказав: «Лише один з моїх сусідів – брехун». Скільки лицарів було за столом?
4. Сума цифр числа x дорівнює y , сума цифр числа y дорівнює z . Яких значень може набувати число x , якщо $x + y + z = 60$?
5. Знайти усі трійки натуральних чисел (a, b, c) , $(a \geq b \geq c)$, для яких справджується умова: добуток будь-яких двох чисел з трійки, збільшений на 1, ділиться на третє число.
6. Усі цифри деякого чотирицифрового числа, яке є точним квадратом, можна зменшити на одне і те саме число так, що нове чотирицифрове число також буде точним квадратом. Знайти усі такі числа.
7. У скільки різних способів можна на шаховій дошці 8×8 розставити найбільшу можливу кількість шахових слонів, жодні два з яких не загрожують один одному?
8. Вісім лицарів круглого столу кожен рік в один і той самий день збираються за круглим столом, при цьому вони обов'язково виконують умову — кожного року у кожного лицаря повинна бути нова пара сусідів. Скільки років щонайбільше можуть продовжуватись їхні зустрічі?
9. Знайти дві останні цифри числа 4^{4^4} .
10. Знайти всі натуральні розв'язки рівняння $x^2 - xy + y^2 = 7$.

Задачі для підготовки до каруселі, середня та старша ліги

1. За круглим столом сидять 12 аборигенів, кожен з яких є або брехуном (завжди каже неправду), або лицарем (завжди каже правду). Кожен сказав: «Лише один з моїх сусідів – брехун». Скільки лицарів було за столом?
2. Знайти усі трійки натуральних чисел (a, b, c) , $(a \geq b \geq c)$, для яких справджується умова: добуток будь-яких двох чисел з трійки, збільшений на 1, ділиться на третє число.
3. У скільки різних способів можна на шаховій дошці 8×8 розставити найбільшу можливу кількість шахових слонів, жодні два з яких не загрожують один одному?
4. У клітинах квадратної таблиці 2007×2007 розставлені числа. Назвемо «хрестом» таку фігуру, що складається з повного стовпчика та повного рядка. Сума чисел, що утворюють хрест будь-який хрест не менше за 4013. яке найменше значення може мати сума усіх чисел таблиці?
5. Знайти дві останні цифри числа 4^{4^4} .
6. У трикутнику ABC відомі кути A та C , а також довжина сторони AB . M — середина BC . Знайти довжину BM .
7. Діагональ паралелограма ділить його кут на частини у 30° та 45° . Знайдіть відношення сторін паралелограма.
8. Сторона трикутника дорівнює 21, а дві інші утворюють кут у 60° та відносяться як 3:8. Знайдіть ці сторони.
9. Кут при вершині D трапеції $ABCD$ з основами AD та BC дорівнює 60° . Знайдіть діагоналі трапеції, якщо $AD = 10$, $BC = 3$ та $CD = 4$.
10. У трикутнику довжина основи дорівнює 12, один із кутів при ній дорівнює 120° , довжина сторони навпроти цього кута дорівнює 28. Знайдіть довжину третьої сторони.
11. У рівнобедреному прямокутному трикутнику ABC на продовженні гіпотенузи AB за точку B відкладено відрізок BD , рівний BC , і точку D з'єднано з C . Знайдіть сторони трикутника ADC , якщо катет $BC = a$.
12. Дано рівносторонній трикутник зі стороною a . Знайдіть довжину відрізка, що з'єднує вершину трикутника з точкою, що ділить протилежну сторону у відношенні 2:1.
13. Опишіть усі розв'язки рівняння $ax^2 + bx + c = d$ залежно від значень параметрів a , b , c , d .
14. Знайти всі натуральні розв'язки рівняння $x^2 - xy + y^2 = 7$.
15. Розв'яжіть рівняння $2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 = 0$.
16. Відомо, що кубічне рівняння $x^3 + 2x^2 - 81x + 198$ має три дійсних розв'язки. Знайдіть суму їхніх квадратів.
17. При яких значеннях параметрів a та b рівняння $x^3 + ax + b = 0$ має три різних розв'язки, що утворюють арифметичну прогресію?
18. Числа x , y та z такі, що $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$. Якого найбільшого значення може набувати вираз $x + 2y + 4z$?