

**Заняття 1.02.2010, Технічний ліцей, 9-й клас. Класичні нерівності. Нерівність Коші.**

1. Доведіть нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним двох чисел:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  для невід'ємних  $a$  та  $b$ .
2. Доведіть, що  $\frac{x^2+y^2}{2} \geq xy$  для довільних  $x$  та  $y$ .
3. Доведіть нерівність між середнім квадратичним і середнім арифметичним двох чисел:  
 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$  для довільних  $a$  та  $b$ .
4. Знайдіть найменше значення виразу  $x + \frac{1}{4x}$  для додатних  $x$ .
5. Доведіть нерівність Коші між середнім арифметичним і середнім геометричним чотирьох чисел:  $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$  для невід'ємних  $a, b, c$  та  $d$ .
6. Знайти найменше значення виразу  $x + y + z + \frac{1}{xyz}$  для додатних  $x, y$  та  $z$ .
7. Доведіть нерівність для додатних значень змінних:  $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ .
8. Доведіть, що  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  для довільних  $x, y$  та  $z$ .

Додому:

1. Довести, що  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ .
2. Доведіть нерівність між середнім геометричним та середнім гармонічним двох чисел:  
 $\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$  для додатних  $a$  та  $b$ .
3. Виписати нерівність Коші для  $n$  невід'ємних чисел. Спробувати довести її для  $n = 3$ .