

Language: **Ukrainian**

Day: **1**



**EGMO 2013**

European Girls' Mathematical Olympiad

Середа, 10 квітня, 2013

Задача 1. На продовженні сторони  $BC$  трикутника  $ABC$  за точку  $C$  відмітили точку  $D$  так, що  $CD = BC$ , а на продовженні сторони  $CA$  за точку  $A$  відмітили точку  $E$  так, що  $AE = 2CA$ . Доведіть, що якщо  $AD = BE$ , то трикутник  $ABC$  є прямокутним.

Задача 2. Знайдіть всі цілі числа  $m$ , для яких квадрат  $m \times m$  може бути розрізаний на 5 прямокутників, довжинами сторін яких є числа  $1, 2, 3, \dots, 10$ , що взяті у деякому порядку.

Задача 3. Нехай  $n$  — натуральне число.

- (a) Доведіть, що існує множина  $S$ , що складається з  $6n$  попарно різних натуральних чисел, причому найменше спільне кратне довільних двох елементів множини  $S$  не перевищує  $32n^2$ .
- (b) Доведіть, що у довільній множині  $T$ , що складається з  $6n$  попарно різних натуральних чисел, знайдуться два елементи, найменше спільне кратне яких більше за  $9n^2$ .

Language: **Ukrainian**

Day: **2**



**EGMO 2013**

European Girls' Mathematical Olympiad

Четвер, 11 квітня, 2013

Задача 4. Знайдіть всі натуральні числа  $a$  та  $b$ , для яких існує три послідовні цілі числа, при яких значення многочлену

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}$$

є цілими.

Задача 5. Нехай  $\Omega$  — описане коло трикутника  $ABC$ . Коло  $\omega$  дотикається до сторін  $AC, BC$  і внутрішнім чином дотикається до кола  $\Omega$  в точці  $P$ . Пряма, що паралельна до прямої  $AB$  і перетинає внутрішність трикутника  $ABC$ , дотикається до кола  $\omega$  в точці  $Q$ .

Доведіть, що  $\angle ACP = \angle QCB$ .

Задача 6. Білосніжка та семеро гномів живуть в своєму будиночку в лісі. У кожен з 16 послідовних днів, деякі гноми працювали у діамантовій шахті, в той час як усі інші гноми збирали у лісі ягоди. (Жоден гном не виконував обидва типи роботи протягом одного дня.) У будь-які два різні дні, хоча б три гноми виконували обидва типи роботи. Також відомо, що у перший день всі сім гномів працювали у шахті.

Доведіть, що в один з цих 16 днів, всі сім гномів збирали ягоди.

Language: Ukrainian

Час виконання: 4 години 30 хвилин  
Кожна задача оцінюється в 7 балів