

## Математичний бій 2, середня ліга, група А

1. У клітинках квадратної таблиці  $5 \times 5$  розташовано числа так, що в кожному рядку та в кожному стовпчику сума всіх чисел ціла. Також відомо, що сума всіх чисел в таблиці дорівнює 11. Доведіть, що у деякій клітинці стоїть число, що не менше за  $\frac{3}{5}$ .

2. Дано різні дійсні числа  $a$  і  $b$  такі, що рівняння

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

не має дійсних коренів. Доведіть, що число  $20(b - a)$  не може бути цілим.

3. Точка  $P$  – середина сторони  $BC$  квадрата  $ABCD$ . На стороні  $AD$  обрано точки  $Q$  та  $R$  так, що  $4AQ = 4DR = AD$ . Знайдіть суму кутів  $ACQ$ ,  $BRP$  та  $ABQ$ .

4. Знайдіть усі прості числа, що мають вигляд  $1010\dots01$ .

5. Кожна з 55 учасниць жіночих зборів написала у скількох з присутніх вік (число повних років) не співпадає з її віком. Ви не повірите, але виявилося, що кожна з них написала саме свій вік у роках! Яка найбільша кількість різних чисел могла бути написана?

6. Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  задовольняють співвідношенню:

$$x^4y^3 + y^4z^3 + z^4x^3 = x^3y^4 + y^3z^4 + z^3x^4.$$

Доведіть, що серед них є два рівних.

7. Знайдіть найменше 2011-значне число  $n$  таке, що десятковий запис числа  $3n$  містить лише парні цифри.

8. 20 футбольних команд беруть участь у першості. У перший день всі команди зіграли по одній грі. У другий день також всі зіграли по одній грі. Доведіть, що після другого дня можна обрати такі 10 команд, що жодні 2 з них не грали одна з одною.

9. У трикутник  $ABC$  вписано коло. Дотичні до цього кола, що паралельні сторонам трикутника, відтинають від трикутника  $ABC$  три маленьких трикутничочки з площинками  $x^2$ ,  $y^2$  та  $z^2$ . Знайдіть площа трикутника  $ABC$ .

10. Позначимо через  $p(n)$  добуток цифр натурального числа  $n$ . Знайдіть всі натуральні  $n$  такі, що

$$10p(n) = n^2 + 4n - 2005.$$