

Вчимося зводити до спільного знаменника

Вы хотите песен? — их есть у меня!

Факт 1. (Нерівність Мюрхеда). Якщо $\mathbf{m} \succcurlyeq \mathbf{k}$, то $\Phi(\mathbf{m}) \geq \Phi(\mathbf{k})$.

Факт 2. (Нерівність Шура). $\Phi(1, 0, 0) + \Phi(1, 1, 1) \geq 2\Phi(2, 1, 0)$.

Факт 3. (Узагальнена нерівність Шура). Для $r > 0$ має місце $\Phi(r+2, 0, 0) + \Phi(r, 1, 1) \geq 2\Phi(r+1, 1, 0)$.

Факт 4. (Опуклість на $\Phi(\cdot)$) Для довільних $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ та $\lambda \in [0, 1]$ має місце

$$\lambda\Phi(\mathbf{m}) + (1-\lambda)\Phi(\mathbf{k}) \geq \Phi(\lambda\mathbf{m} + (1-\lambda)\mathbf{k}).$$

Задачі

1. Для невід'ємних чисел a, b, c таких, що $a + b + c = 1$, довести нерівність

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}.$$

2. Нехай I — інцентр трикутника ABC . Довести нерівність

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \geq \frac{AB^2 + BC^2 + AC^2}{3}.$$

3. Для невід'ємних чисел x, y, z таких, що $xy + yz + zx = 1$, довести нерівність

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}.$$

4. Для невід'ємних чисел a, b довести нерівність

$$\frac{a^4 + a^2b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3b + b^3a}{2}.$$

5. Для додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{ac}{a^5 + c^5 + ac} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq 1.$$

6. Для невід'ємних чисел a, b, c, d довести нерівність $\sqrt{\Phi(1, 1, 0, 0)} \geq \sqrt[3]{\Phi(1, 1, 1, 0)}$.

7. Для додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$\frac{1}{4a^2 - ab + 4b^2} + \frac{1}{4b^2 - bc + 4c^2} + \frac{1}{4c^2 - ca + 4a^2} \geq \frac{9}{7(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

8. Для додатних чисел a, b, c таких, що $abc \geq 1$, довести нерівність

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

9. Для додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$