

Трохи задач

1. Юрко та Дмитро дуже люблять дітей, але ще більше вони люблять тригонометрію. А от діти тригонометрію зовсім не люблять. Юрко посперечався з Дмитром, що через тиждень усі діти будуть знати всі-всі тригонометричні формули, тобто вони не зроблять жодної помилки в жодній формулі. Юрко з Дмитром вирішили не пускати тих дітей на факультативи, які не здадуть усі формули. Юрко дуже хоче перемогти, він знає, що діти його не підведуть. І дійсно, доведіть, що Юрко виграє суперечку.
2. Доведіть, що зліченне об'єднання злічених множин — зліченна множина.
3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} = 5 \\ 3xy - 10y = 3. \end{cases}$$

4. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.
5. Розв'язати рівняння $\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2$.
6. Знайти усі $a \in \mathbb{N}$, що $a = 2\tau(a)$, де $\tau(a)$ — кількість натуральних дільників числа a .
7. Довести нерівність для додатних чисел $a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a + b + c)$.
8. Всередині прямокутника $ABCD$ обрано таку точку P , що $\angle APD + \angle BPC = 180^\circ$. Знайти суму кутів DAP і BSP . (А може, порахувати аналітично?)