VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Математичний бій №4. Старша ліга. Група А

2 відсотки людей — думають, 3 відсотки — думають, що вони думають, а 95 відсотків краще помруть, ніж будуть думати.

Дж.Б. Шоу

1. Дано трикутник ABC. Точки D і E взяті на прямій AB в порядку: D, A, B, E, причому $AD = AC$ і $BE = BC$. Бісектриси кутів A і B перетинають протилежні сторони трикутника в точках P і Q, а описане коло — в точках M і N відповідно. Пряма, проведена через точку A і центр описаного кола трикутника BME, перетинає пряму, проведену через точку B і центр описаного кола трикутника AND, в точці $X \neq C$. Доведіть, що $CX \perp PQ$.

2. Послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ визначається так: $a_1 = 3$, $a_2 = 11$ і $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ для $n \geqslant 3$. Доведіть, що кожен член послідовності можна подати у вигляді $a^2 + 2b^2$ для деяких натуральних a та b.

3. Нехай $ABCD$ — правильний тетраедр, E — точка на сфері, описаній навколо тетраедра, яка діаметрально протилежна точці A. Для довільної точки X простору доведіть нерівність
$$BX + CX + \sqrt{2}EX \geqslant \sqrt{3}DX.$$
Чи може для деяких точок простору справджуватися рівність?

4. Нехай p — просте, q — ціле, що не ділиться на p. Доведіть, що існує нескінченно багато $k \in \mathbb{N}$, таких, що pq ділить $q^k + 1 - k$.

5. Знайти усі многочлени P і Q з дійсними коефіцієнтами, для яких існує нескінченно багато $n \in \mathbb{N}$ таких, що $P(1)P(2)\ldots P(n) = Q(n!)$.

6. На колі довжини $6k$ відмітили $3k$ дуг: k дуг довжини 1, k дуг довжини 2 і k дуг довжини 3 (дуги не мають спільних точок, окрім, можливо, кінців). Доведіть, що на колі знайдуться дві діаметрально протилежні точки, які будуть кінцями деяких дуг.

7. Доведіть, що будь-яка функція $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умову
$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2 \quad \text{для всіх} \quad x, y \in \mathbb{Q},$$
є константою.

8. На дошці записані числа $1, 2, \ldots, 24$. Кожної хвилини числа a, b, c, що є на дошці, можна замінити на
$$\frac{2b + 2c - a}{3}, \frac{2c + 2a - b}{3}, \frac{2a + 2b - c}{3}.$$
Чи можна сподіватися, що колись на дошці з'явиться число, більше, ніж 70?

9. На столі лежить 1234567890 монет. За один хід дозволяється забрати довільну додатну кількість монет, що не перевищує суми цифр числа монет, які на момент перед ходом лежали на столі. Двоє гравців ходять по черзі. Виграє той з них, після ходу якого на столі не залишиться монет. Хто виграє за правильної гри: перший чи другий гравець?

10. В трикутник ABC вписано коло ω. P і Q — такі точки на сторонах AB і AC відповідно, що відрізок PQ паралельний BC і дотикається ω. Нехай F і E — точки дотику сторін AB і AC з колом ω відповідно, M — середина відрізка PQ, T — точка перетину EF і BC. Доведіть, що пряма TM дотикається до ω.