Бій за третє місце, середня ліга, група А

1. У клітинках головної діагоналі дошки 2010×2010 розставлені 2010 фішок. За один хід Настя може обрати будь-які дві фішки і пересунути кожну з них на сусіднє по горизонталі або вертикалі вільне поле. Чи можна через декілька ходів пересунути всі фішки у лівий стовпчик?

2. У середині гострокутного трикутника ABC обрана точка P. Точки A_1, B_1, C_1 – основи перпендикулярів з точки P на сторони BC, CA, AB відповідно. Точки A_2, B_2, C_2 – ортоцентри трикутників AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 відповідно. Доведіть, що прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 перетинаються в одній точці.

3. Є два натуральних числа m і n, $n > m$. Доведіть, що n можна представити у вигляді суми двох натуральних чисел, одне з яких – дільник числа m, а інше не має з m жодного спільного дільника, крім 1.

4. Кожну грань кубика поділили на 4 рівних квадрати і розфарбували ці квадрати в 3 кольори таким чином, щоб квадрати, що мають одну спільну сторону, були розфарбовані у різні кольори. Доведіть, що в кожний колір пофарбовані по 8 квадратиків.

5. Колоду карток з числами від 1 до 78 дають глядачеві. Той її перемішує, відбирає 40 карток, віддає їх першому фокуснику, а інші залишає собі. Перший фокусник відбирає з отриманих карток дві і повертає їх глядачеві. Глядач додає до цих карток одну з своїх тридцяти восьми, і, після перемішування, віддає ці три картки другому фокуснику. Другий фокусник показує, яка з цих карток була обрана глядачем. Запропонуйте, як міг бути показаний цей фокус.

6. Доведіть, що для будь-яких x_1, x_2, $\ldots$, x_n справджується нерівність:

$$x_1(1-x_1)+(x_2-x_1)(1-x_2)+(x_3-x_2)(1-x_3)+\ldots+(x_n-x_{n-1})(1-x_n)<\frac{1}{2}.$$

7. Три кола S_1, S_2 та S_3 дотикаються один до одного зовнішним чином: S_1 та S_2 – в точці A, S_2 та S_3 – в точці B, S_1 та S_3 – в точці C. Прямі BC та BA другий раз перетинають S_1 в точках M та N відповідно. Доведіть, що MN – діаметр кола S_1.

8. Є набір натуральних чисел a_1, a_2, $\ldots a_n$, серед яких можуть бути рівні. Позначимо через f_k кількість чисел цього набору, які не менші, ніж k. Доведіть, що $f_1 + f_2 + \ldots = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

9. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy + x + y + 3 = 0, \\ x^2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$$

10. Чому дорівнює сума всіх чисел від 1 до 239, у котрих сума цифр парна?