VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Математичний бій №4. Старша ліга. Група B

2 відсотки людей — думають, 3 відсотки — думають, що вони думають, а 95 відсотків краще помруть, ніж будуть думати.

Дж.Б. Шоу

1. Бісектриси AA_1 і BB_1 прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) перетинаються в точці I. Нехай O — центр описаного кола трикутника CA_1B_1. Доведіть, що $OI \perp AB$.

2. Знайти усі натуральні n, для яких $\sqrt{\sqrt{n} + \sqrt{n + 2009}}$ буде цілим числом.

3. Для додатних чисел a, b, c таких, що $ab + bc + ca = 3$ довести нерівність
$$\frac{1}{1 + a^2(b + c)} + \frac{1}{1 + b^2(c + a)} + \frac{1}{1 + c^2(a + b)} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

4. Нехай p — просте, q — ціле, що не ділиться на p. Доведіть, що існує нескінченно багато $k \in \mathbb{N}$, таких, що pq ділить $q^k + 1 - k$.

5. Після того, як Тимур перестав вчитися, він забув, як додавати дійсні числа. Недовго думаючи, він придумав нову операцію $*$. Виявилося, що для усіх дійсних x, y, z має місце рівність $(x*y)*z = x+y+z$. Доведіть, що насправді операція $*$ еквівалентна операції $+$, тобто для будь-яких дійсних a і b має місце $a * b = a + b$.

6. У змаганнях, що тривають k днів, беруть участь $n \geqslant 2$ гравців. Кожного дня усі гравці одержують різну кількість очків від 1 до n. Укінці k-го дня виявилося, що кожен гравець набрав рівно 26 очків. Знайти усі пари (n, k), для яких таке можливе.

7. Доведіть, що будь-яка функція $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє умову
$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2 \quad \text{для всіх} \quad x, y \in \mathbb{Q},$$
є константою.

8. На дошці записані числа $1, 2, \ldots, 24$. Кожної хвилини числа a, b, c, що є на дошці, можна замінити на
$$\frac{2b + 2c - a}{3}, \frac{2c + 2a - b}{3}, \frac{2a + 2b - c}{3}.$$
Чи можна сподіватися, що колись на дошці з'явиться число, більше, ніж 70?

9. На столі лежить 1234567890 монет. За один хід дозволяється забрати довільну додатну кількість монет, що не перевищує суми цифр числа монет, які на момент перед ходом лежали на столі. Двоє гравців ходять по черзі. Виграє той з них, після ходу якого на столі не залишиться монет. Хто виграє за правильної гри: перший чи другий гравець?

10. Довести, що трикутник ABC подібний до трикутника, складеного з медіан трикутника ABC, тоді і тільки тоді, коли квадрати сторін трикутника ABC утворюють арифметичну прогресію.