Математичний бій 4, молодша ліга, група B

1. У клітинках головної діагоналі дошки 2010×2010 розставлені 2010 фішок. За один хід Настя може обрати будь-які дві фішки і пересунути кожну з них на сусіднє по горизонталі або вертикалі вільне поле. Чи можна через декілька ходів пересунути всі фішки у лівий стовпчик?

2. Колоду карток з числами від 1 до 78 дають глядачеві. Той її перемішує, відбирає 40 карток, віддає їх першому фокуснику, а інші залишає собі. Перший фокусник відбирає з отриманих карток дві і повертає їх глядачеві. Глядач додає до цих карток одну з своїх тридцяти восьми, і після перемішування віддає ці три картки другому фокуснику. Другий фокусник показує, яка з цих карток була обрана глядачем. Запропонуйте, як міг бути показаний цей фокус.

3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = 2y - 1, \\ x^4 + y^4 = 2. \end{cases}$$

4. Натуральні числа m і n такі, що $2^m + 3^n$ ділиться на 5. Доведіть, що $2^n + 3^m$ ділиться на 5.

5. Нехай AF – медіана $\triangle ABC$, точка D – середина відрізка AF, нехай E – точка перетину прямої CD та сторони AB. Виявилось, що $BD = BF = CF$. Доведіть, що $AE = DE$.

6. Кожну грань кубика поділили на 4 рівних квадрати і розфарбували ці квадрати в 3 кольори таким чином, щоб квадрати, що мають одну спільну сторону, були розфарбовані у різні кольори. Доведіть, що в кожний колір пофарбовані по 8 квадратиків.

7. Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Периметри трикутників ABC і ABD рівні. Рівні й периметри трикутників ACD і BCD. Доведіть, що периметри трикутників AOD і BOC рівні.

8. Яку найбільшу кількість різних натуральних чисел можна обрати так, щоб сума будь-яких трьох з них була простим числом?

9. Число 1047 при діленні на A дає остачу 23, а при діленні на $A + 1$ – остачу 7. Знайдіть A.

10. Чому дорівнює сума всіх чисел від 1 до 239, у котрих сума цифр парна?