

Квадратний тричлен

Вопрос на экзамене у Василия Ивановича:
«свойства квадратного трехчлена».
Но Василий Иванович не только описать
свойства, но и представить себе
такую гадость не мог.

1. При якому x функція $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ приймає своє найменше значення? *Правильно, ми робили цю задачу в класі. Зробіть ще раз.*
2. Довести, що корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ і $c \neq 0$ обчислюються за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Так, тепер окрім тієї занудної формули, яку знає кожен школяр, ви знаєте ще одну!

3. Довести, що відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$ дорівнює $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
4. Нехай a, b, c — дійсні числа такі, що $(a + b + c)c < 0$. Довести, що тоді $b^2 > 4ac$.
5. Довести, що якщо для будь-якого додатного p усі корені рівняння $ax^2 + bx + c + p = 0$ дійсні і додатні, то $a = 0$.
6. Нехай a, b, c — різні дійсні числа. Довести, що для всіх дійсних x виконується тотожність

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

Пам'ятаєте, як ми робили наступну задачу? Нехай α — корінь рівняння $x^2 + ax + b = 0$, β — корінь рівняння $x^2 - ax - b$. Довести, що тоді між α і β міститься корінь рівняння $x^2 - 2ax - 2b$. Якщо пам'ятаєте, то №7 для вас!

7. Квадратний тричлен $f(x)$ має два дійсні корені, різниця між якими не менше натурального числа $n \geq 2$. Довести, що квадратний тричлен $f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+n)$ теж має два дійсні корені.
8. Для чисел $x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$ довести нерівність

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1 \leq 1.$$

9. **** $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Розв'язати рівняння: $f(f(f(f(f(x)))))) = 0$. *Так, чотири зірочки — це не просто так. Я дуже люблю цю задачу.*