

Геометрия. Дополнительные построения и вписанные четырёхугольники

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. В треугольнике две стороны равны 6 и 8, а длина медианы, проведённой к третьей стороне, равна 5. Найдите угол между сторонами длиной 6 и 8.

Задача 2. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в которой углы A и B прямые. Пусть M — середина стороны CD . Доказать, что $MA = MB$.

Задача 3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AD = BC$, $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

Задача 4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L так, что AL в два раза больше медианы CM . Оказалось, что угол ALC равен 45° . Докажите, что AL и CM перпендикулярны.

Задача 5. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, в котором $\angle CAD + \angle BCA = 180^\circ$ и $AB = BC + AD$. Доказать, что $\angle ACD + \angle BAC = \angle CDA$.

Задача 6. Дана окружность ω и точка P вне неё. Из P проведены две касательные PA и PB к ω и секущая, которая пересекает ω в D и E . Пусть M — середина DE . Доказать, что DE содержит биссектрису угла AMB .

Задача 7. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены по одну сторону от прямой AE и имеют единственную общую точку C . Пусть N , M , K — середины отрезков BD , AC , CE соответственно. Докажите, что треугольник MNK — равносторонний.

Задача 8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что проекции точки A_1 на AB , AC , BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой.

Задача 9. Дано треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$. Докажите, что длина отрезка DE не больше половины периметра ABC .

Задача 10. (Лемма Архимеда) Пусть N — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC , в котором $AB < BC$. Пусть K — проекция точки N на BC . Докажите, что $AB + BK = KC$.

Задача 11. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) отмечены середины диагоналей AC , BD — точки P , Q соответственно. Докажите, что если $\angle ABP = \angle CBD$, то $\angle BCQ = \angle ACD$.

Задача 12. Дано параллелограмм $ABCD$ и точка P внутри него такая, что $\angle PCD = \angle PAD$. Доказать, что $\angle ABP = \angle PDA$.

Задача 13. Дано треугольник ABC такой, что $\angle BAC = 60^\circ$. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AP и BQ . Известно, что $AB + BP = AQ + QB$. Найдите углы треугольника ABC .