

Многочлены. Задание 5.

Задача 1. Разобрать статью Л.Н. Камнева «Иррациональность суммы радикалов», Квант, 1972, номер 2. Найти эту статью можно на сайте mssme.ru, журнал Квант.

Задача 2. Представить многочлен $x^8 + 98x^4 + 1$ в виде произведения двух многочленов с целыми коэффициентами, которые отличны от констант.

Задача 3. Задача 22.19 из Зарубежных математических олимпиад.

Задача 4. Пусть $z = \sqrt{2} + 10\sqrt{5} + 2\sqrt{35} + 3\sqrt{11} + \sqrt{39}$. Предположим, $P(x)$ имеет целые коэффициенты, z его корень. Какие еще числа являются корнями $P(x)$? Какую наименьшую степень может иметь $P(x)$?

Задача 5. (сопряжение в кватернионах) Докажите, что для кватернионов ξ, η выполнено $\overline{\xi\eta} = \overline{\eta}\cdot\overline{\xi}$. Для ненулевого кватерниона ξ найти ξ^{-1} , выразить его через ξ . Решить в кватернионах уравнение $\xi^2 = 1$.

Задача 6. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1, $P(0) \neq 0$. Предположим, что все корни P лежат в круге $|z| \leq 1$. Верно ли, что для некоторого m многочлен $z^m - 1$ делится на $P(z)$?

Следующие задачи: функциональные уравнения. Будет хорошо, если вы успеете над ними подумать.

Задача 7. Найти все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $f(x^3 + y^3) = x^2f(x) + yf(y^2)$.

Задача 8. Выяснить, существует ли непрерывная функция $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой:

- (1) $f(x) = x + f(f(f(x)))$, $x \in \mathbb{R}$,
- (2) $f(x) = x + f(f(x))$.

Задача 9. Найти все многочлены $P(x)$, для которых $P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$.

Задача 10. Найти все многочлены $P(x)$, для которых $xP(x - 1) = (x - 26)P(x)$.