

# Функціональні рівняння для чотких пацанів-1

Хілько Данило dkhilko@ukr.net

1. Нехай  $\mathbb{R}^*$  — множина ненульових дійсних чисел. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  такі, що

$$f(x^2 + y) = (f(x))^2 + \frac{f(xy)}{f(x)},$$

для всіх  $x, y \in \mathbb{R}^*$  та  $-x^2 \neq y$ .

2. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x, y$ :

$$f(xf(y)) + f(y + f(x)) - f(x + yf(x)) = x.$$

3. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x, y$

$$f(xf(y)) + y + f(x) = f(x + f(y)) + yf(x)$$

4. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x, y$

$$f(xy) = f(x + y)(f(x) + f(y)), \forall x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

5. Знайдіть всі дійсні числа  $a$ , для яких існує рівно одна функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  така, що для всіх дійсних  $x, y$

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + a \cdot y$$

6. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x, y$

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x).$$

7. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x$  та  $y$ ,

$$f(x + y^2) = f(x) + |yf(y)|.$$

8. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x, y$

$$f(f(y)) + f(x - y) = f(xf(y) - x).$$

9. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для всіх дійсних  $x, y$

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + f(x)^2.$$

10. Знайдіть всі функції  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  такі, що для всіх дійсних  $x, y \in \mathbb{R}^+$ ,

$$f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{xf(y)}\right) = f(y)$$

11. Дано  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  таку, що для всіх  $x, y \in \mathbb{Q}$  число  $f(x + y) - f(x) - f(y)$  є цілим. Чи обов'язково існує число  $c$ , для якого  $f(x) - cx$  є цілим для всіх  $x$ ?