**Відбір команди міста Києва на IV (заключний) етап**

**Всеукраїнської математичної олімпіади**

**I тур**

8 клас

**1.** Знайдіть усі такі числа , що серед натуральних чисел першої тисячі є рівно 10 чисел, у кожного з яких сума цифр дорівнює .

***Відповідь:*** , .

***Розв’язання*.** Очевидно, що . Якщо , де , то для такого  є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 6), є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 3), та є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 3). Тобто усього не менше 12 чисел. Тому такі числа умові не задовольняють.

Якщо , де , то для такого  є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 6), є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 3), та є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 3). Тобто є усього не менше 12 чисел. Тому такі числа умові не задовольняють.

Якщо , де , то для такого  є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 6), є числа, що отримуються перестановкою цифр , ,  (таких чисел 6). Тобто є усього не менше 12 чисел. Тому і такі числа умові не задовольняють.

Залишились можливі значення 1, 2, 3, 24, 25, 26, 27. Перевірка цих значень показує, що умові задовольняють  та .

**2.** На виставці представлено 100 картин, причому кожна з них нарисована фарбами рівно  різних кольорів (набори кольорів можуть відрізнятися у різних картин). Знайдіть найменше можливе значення , якщо відомо, що будь-які 20 картин на виставці мають спільний колір, а усі картини спільного кольору не мають.

***Відповідь:*** .

***Розв’язання*.** Припустимо, що . Візьмемо першу картину, нехай вона містить кольори від 1 до . Оскільки в усіх картин немає спільного кольору, то можна вибрати картину без кольору 1, картину без кольору 2, , картину без кольору  (можливо картини перетинаються, але важливо, що у підсумку ми виберемо не більше  картин). Легко побачити, що у вибраних картин немає спільного кольору. Тому . Тепер треба переконатись, що при  це можливе. Дійсно, нехай усі картини були нарисовані кольорами від 1 до 21. Перша картина не містить колір 21, друга – колір 20, третя – колір 19, , на 20-й картині відсутній 2-й колір, а на усіх інших – колір 1.

**3.** Знайдіть усі трійки чисел , що задовольняють такій системі:



***Відповідь:*** , для довільного .

***Розв’язання*.** Якщо , то з першого рівняння . Аналогічно, якщо , то ; якщо , то . Тому, якщо якесь з чисел дорівнює , то усі числа дорівнюють . У подальшому вважаємо, що усі числа ненульові. Перепишемо початкові рівняння у вигляді



Якщо , то з другого рівняння математико . З аналогічних міркувань отримаємо, що якщо якісь два з чисел , ,  рівні, то усі числа рівні. У подальшому вважаємо, що числа попарно різні. Перемножимо ці три рівності, тоді після скорочення на матимемо, що  або . Тому рівності вище можна переписати у вигляді

, , .

Тому усі числа , ,  одного знаку, що неможливо, оскільки їх сума дорівнює 0.

**4.** У трикутнику  справджується рівність , а  – його бісектриса. Нехай  – точка перетину прямої, що проходить через  паралельно , та перпендикуляра до прямої , побудованого в точці . Доведіть, що пряма  перетинає відрізок  у його середині.

**4.** **(084) *Розв’язання*.** Нехай  – середина відрізку  (рис. 3.01). Позначимо . Оскільки пряма  паралельна , то . З умови маємо, що . Розглянемо . В цьому трикутнику

.

**Рис. 3.01**













Таким чином  рівнобедрений і . Крім того, . Побачимо, що у  та  рівні дві сторони та кут між ними. Тому ці трикутники рівні, звідки випливає рівність . З іншого боку  рівні за двома сторонами та куту між ними, звідки . Звідси маємо, що , а тому точка  лежить на прямій .

9 клас

**1.** Четвірка натуральних чисел  називається *цікавою*, якщо виконуються такі умови:

*  – просте непарне число;
* числа , ,  попарно різні;
* числа ,  та  діляться на .

Доведіть, що для усіх цікавих четвірок виконується нерівність: .

***Розв’язання*.** Без обмеження загальності розгляду вважатимемо, що . За умовою  та , звідси . Аналогічно . Очевидно,  не ділиться на . Тому  та . Звідси маємо, що . Тоді  та . Легко бачити, що якщо , то , що неможливо. Таким образом, . Томі маємо:



**2.** У різні місця палки довжиною 1 метр посадили 2016 божа корівка. Кожна божа корівка біжить по палці або в один, або в інший бік зі швидкістю 1 см/с. Якщо дві божі корівки зіштовхуються, то вони розвертаються та біжать у протилежні боки. Якщо божа корівка добігає до будь-якого із кінців палки, то вона відлітає. Яка найбільша кількість зштовхувань божих корівок могло відбутися?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання*.** Будемо вважати, що коли зіштовхуються дві божі корівки, вони не розгортаються, а пробігають одна повз іншу та продовжують рух в тому ж напрямі. Кількість зштовхувань при цьому не зміниться. Таким чином, ми можемо вважати, що у нас є  божих корівок, які біжать наліво,  божих корівок, які біжать направо, а кількість зштовхувань не більше . Оскільки , то з відомої нерівності між середніми .

**3.** Заданий опуклий чотирикутник , у якому . Нехай  – середина відрізку . Виявилось, що . Доведіть, що .

**Рис. 3.02**



















***Розв’язання*.** Продовжимо відрізок  за точку  на його довжину до точки . Чотирикутник  є паралелограмом. Тоді , тобто чотирикутник  вписаний та . Нехай  перетинає  у точці , а  перетинає  у точці . Побачимо, що  та . Тому, . Крім того,  і , тобто . Таким чином,  і  – висоти трикутника , а точка  – його ортоцентр. Нехай  перетинає  у точці . Тоді  також висота  та , звідки маємо, що  – вписаний чотирикутник. Тому, , що й траба було довести.

**4.** Задані многочлени

 та ,

де , ,  – ненульові дійсні числа. Відомо, що  має три різних дійсних корені , , , які є також коренями многочлену .

***а)*** Доведіть, що при  справджується нерівність .

***б)*** Знайдіть усі можливі цілі значення , , .

***Відповідь: б)*** , .

***Розв’язання*.** ***а)*** З умови випливає, що  ділиться на , тобто . Прирівнюючи коефіцієнти при  та вільні члени, знаходимо, що  та . Прирівнюючи усі ніші коефіцієнти, маємо:

при : ;

при : ;

при : .

Звідси . Оскільки  додатне, то . З рівності , маємо, що дискримінант  має бути невід’ємним, тобто . Звідси, .

***б)*** Оскільки  та  – цілі, то  – точний квадрат. Але при  маємо, що , а при  маємо . Тому, , . Перевіримо, що у такому випадку  дійсно має 3 дійсних корені:



має корені  та , які також є коренями

.

10 клас

**1.** Число 125 записане у вигляді суми декількох попарно різних взаємно простих чисел більших за одиницю. Яка найбільша можлива кількість записаних доданків?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання*.** Оскільки усі доданки більше , то кожне з них має простий дільник, а оскільки вони попарно взаємно прості, то ці дільники попарно різні. Якщо доданків хоча б 10, то їх сума не менше суми перших десяти простих чисел:

.

Тому доданків менше десяти. Якщо їх дев’ять, то усі вони мають бути непарними, бо вони попарно взаємно прості та їх сума непарна. Але тоді сума не може бути менше, ніж

.

Таким чином, записані не більше 8 доданків. Пример для 8 доданків такий:

.

**2.** У жіночому клубі є 100 леді. Кожна з них протягом року пила віскі рівно з 56 іншими леді з цього клубу. В клубі є рада, у яку входять 50 найбільш поважних леді. Відомо, що будь-які дві леді, які входять в раду, пили разом віскі. Доведіть, що усіх леді в клубі можна розділити на дві групи так, що будь-які дві леді з однієї групи пили разом віскі.

***Розв’язання*.** Кожна леді, що входить до ради, випила віскі з 49 леді з ради, та з 7 леді, які до ради не входять. Тоді усього кількість разів, коли леді з ради пили віскі з леді не з ради було . Кожна леді, що не входить до ради, випила віскі не більше ніж з 49 леді, що не входять до ради, и хоча б з 7 леді, які входять до ради. Але ми вже з’ясували, що пили віскі леді з ради та леді не з ради було рівно . Тому кожна леді, що не входить до ради, випила віскі рівно з 7 леді, які входять до ради, і рівно з 49 леді, що не входять до ради. Тоді шуканий розподіл на дві групи – це розподіл на 50 леді, які в входять до ради, та 50 леді, які туди не входять.

**Рис. 3.03**



















**3.** Заданий опуклий чотирикутник , у якому . Нехай  – середина сторони . Виявилось, що . Доведіть, що .

***Розв’язання*.** Продовжимо відрізок  за точку  на його довжину до точки  (рис. 3.03). Чотирикутник  буде паралелограмом. Тоді . Нехай  перетинає  у точці , а  перетинає  у точці . Зауважимо, що , звідси маємо, що чотирикутник  – вписаний. Крім того,  та . Тому , тобто . Таким чином,  та  – висоти трикутника , а точка  – його ортоцентр. Нехай  перетинає  у точці . Тоді  також висота трикутника  і . Оскільки , то маємо, що . Таким чином, чотирикутник  вписаний, звідси , що й треба було довести.

**4.** Сума додатних чисел ,  та  дорівнює 3. Доведіть, що



***Розв’язання*.** Побачиом, що . Тому достатньо показати, що

.

Застосуємо нерівність між середніми до знаменників дробів і матимемо:



Тепер достатньо довести, що . З нерівності Шварца для наборів чисел  та  маємо:



Залишається побачити, що .

11 клас

**1.** На дошці записані 100 квадратних тричлени

  …, 

Соня з’ясувала, що кожен з них має по два дійсних корені. Вона вибрала у кожного тричлена  один з коренів та позначила його  (). Далі Соня підрахувала суму . Яке число вона могла отримати?

***Відповідь:*** .

***Розв’язання*.** Заметим, что . Тогда



**2.** У опуклому чотирикутнику  на стороні  вибрані точки  та  (точка  знаходиться між точками  і ), а на стороні  вибрані точки  і  (точка  знаходиться між  і ). Виявилось, що  та . Крім того, навколо чотирикутника  можна описати коло. Доведіть, що навколо чотирикутника  також можна описати коло.

***Розв’язання*.** З того, що  - вписаний випливає рівність кутів  (рис. 3.04), а з цієї рівності виплаває подібність трикутників  та  (ці трикутники рівнобедрені з рівними кутами при вершині). Крім того  та , звідки . Також маємо, що . Тому трикутники  та  також подібні. Звідки маємо, що , і звідси вже випливає шукане.

**3.** Просте число  та різні натуральні числа  і  такі, що  є середнім арифметичним чисел  і . Доведіть, що число  є або квадратом, або подвоєним квадратом цілого числа.

**Рис. 3.04**

















***Розв’язання*.** В умові сказано, що . Розглянемо вираз:



.

Крім того . Оскільки не існує двох різних натуральних чисел  і  таких, що , то . якщо

, то .

Звідси . Оскільки  — непарне просте число, то одне з чисел ,  ділиться на . Тоді з рівності  маємо, що , а це суперечить умові. Таким чином,  не ділиться на . Тому, . Тобто цей НСД може приймати значення 1, 2, 4.

З рівності  маємо, що  — точний квадрат (якщо НСД дорівнює 1 або 4) чи подвоєний точний квадрат (якщо НСД дорівнює 2).

**4.** Даша та Женя грають у таку гру: у них є скінченна множина натуральних чисел , що відома обом гравцям. Даша вибирає одне з чисел  множини , але не каже Жені, яке саме. Женя може сказати довільне натуральне число  (не обов’язково з множини ). Даша має відповісти, скільки дільників має число . Доведіть, що Женя може сказати рівно одне число і з’ясувати яке число вибрала Даша.

***Розв’язання*.** Позначимо прості числа, які ділять принаймні один елемент множини , через , ,…,  (таких простих чисел скінченна кількість число, оскільки і сама множина  скінченна). Будь-який елемент  можемо записати у вигляді , де . Тоді якщо , то кількість дільників числа  дорівнює . Нехай . Розглянемо многочлен . Степінь цього многочлену дорівнює , а коефіцієнт при  дорівнює . Якщо ми виберемо , то  буде представляти собою розклад у системі числення з основою  деякого числа, усі «цифри» якого однозначно визначаються значеннями . Таким чином, залишається вибрати , де , та .