

Складні нерівності

Довести нерівності:

1. $x^x + y^y \geq x^y + y^x$, якщо $x, y > 0$.

2. $\frac{bcd}{a^3+bcd} + \frac{acd}{b^3+acd} + \frac{abd}{c^3+abd} + \frac{abc}{d^3+abc} \leq 1$, якщо $a, b, c, d > 0$.

3. $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$, якщо $a, b, c > 0$.

4. $\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ac} + \frac{c^2}{c^2+2ab} \geq 1 \geq \frac{bc}{a^2+2bc} + \frac{ac}{b^2+2ac} + \frac{ab}{c^2+2ab}$, якщо $a, b, c > 0$.

5. $\frac{1}{1+a_1} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}}$, якщо $0 \leq a_i \leq 1$.

6. $(\frac{a}{1-b})^a \geq (\frac{b}{1-a})^{1-a}$, якщо $0 < a, b < 1$.

7. $\operatorname{tg} \alpha_0 \dots \operatorname{tg} \alpha_n \geq n^{n+1}$, якщо $\sum_{i=0}^n \operatorname{tg}(\alpha_i - \frac{\pi}{4}) \geq n - 1$ і $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$.

8. $\cos \alpha_1 \dots \cos \alpha_n (\operatorname{tg} \alpha_1 + \dots \operatorname{tg} \alpha_n) \leq \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-2}{2}}}$, якщо $\alpha_i \in (0, \frac{\pi}{2})$.