

## Формула Ейлера

**Означення.** Граф називається *планарним*, якщо його можна намалювати на площині таким чином, що його ребра не будуть перетинатися. Уже намальований планарний граф на площині називають *плоским*.

**Теорема Ейлера.** У будь-якому зв'язному планарному графі

$$B - P + \Gamma = 2.$$

Пам'ятаємо, що у планарному графі виконується нерівність

$$2P \geq 3\Gamma.$$

1. Чи існує планарний граф, який має 7 вершин і 16 ребер?
2. Доведіть, що для планарного графа виконується нерівність  $P \leq 3B - 6$ .
3. Довести, що граф, який має 10 вершин, степінь кожної з яких дорівнює 5, — не планарний.
4. Чи можна побудувати три будинки, вирити три колодязі і з'єднати стежками кожний будинок з кожним колодязем так, щоб стежки не перетиналися?
5. Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не більше 5.
6. Кожне ребро повного 11-вершинного графа пофарбовано в один з двох кольорів: жовтий або синій. Довести, що або "жовтий" або "синій" граф не є планарним.
7. Одному божевільному королю захотілося побудувати Досконале місто. У ньому мало бути шість площ, кожна площа мала бути з'єднана прямими вулицями рівно з трьома іншими площами. Жодні дві вулиці у місті не повинні перетинатися. Із трьох вулиць, що відходить від кожної площі, одна має проходити всередині кута, що утворюють дві інші вулиці. Чи зможе король здійснити свій задум?