

Нерівність Карамати

1) Для додатних a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^7}{b^3c^2} + \frac{b^7}{c^3a^2} + \frac{c^7}{a^3b^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

2) Для гострокутних трикутників доведіть нерівності:

$$1 \leq \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \text{ та } 2 \leq \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3) Для $n \geq 2$ знайдіть найменше число C таке, що для довільних додатних дійсних x_1, \dots, x_n виконана нерівність

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4$$

4) Для $x > 1$ доведіть нерівність

$$2015! (x^{1008} - 1)^{2015} \leq 1008^{2015} \prod_{i=1}^{2015} (x^i - 1)$$

Теорема Турана

1) x_1, \dots, x_n – дійсні числа. Доведіть, що існує не більше $\frac{n^2}{4}$ пар $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ таких, що $1 < |x_i - x_j| < 2$.

2) У класі із 30 учнів кожен має не більш ніж 5 друзів і серед будь-яких 5 учнів знайдуться два, що не товаришують один з одним. Назвемо групу учнів похмурою, якщо у ній нема жодної пари друзів. Нехай k – кількість учнів у найбільшій похмурій групі. Яке найменше значення може приймати k ?

3) У науковій конференції беруть участь n делегатів, кожний з них знає не більше, ніж k мов. Тим не менш, серед будь-яких трьох учасників конференції знайдуться двоє, що знають одну й ту саму мову. Для якого найменшого n за цих умов можна буде знайти мову, якою спілкуються принаймні 3 делегати?

4) Позначимо K_n^* орієнтований граф на n вершинах a_1, \dots, a_n в якому для довільної пари індексів (i, j) , $i < j$, ребро виходить з a_i до a_j . Яка найбільша кількість ребер може бути в орієнтованому графі на 210 вершинах, в якому не можна знайти підграф K_4^* ?