

Чотири точки на колі

Літній математичний табір "Контора π "
Молодша група

Вправа 1. В трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1 , що перетинаються в ортоцентрі H . Доведіть, що $\angle CA_1B_1 = \angle CBA = \angle CHA_1$.

Вправа 2. Доведіть, що точка, симетрична ортоцентру трикутника відносно його сторони, лежить на описаному колі цього трикутника.

Вправа 3. на стороні AC трикутника ABC обрано точку D . Дотична, що проводять в точці D до описаного кола трикутника BDC , перетинає сторону AB в точці C_1 , аналогічно визначається точка A_1 . Доведіть, що $A_1C_1 \parallel AC$.

Задача 1. (Точка Мікеля)

1. На сторонах AB , BC , CA трикутника ABC взято точки C_1 , A_1 , B_1 . Доведіть, що три описаних кола трикутників C_1AB_1 , B_1CA_1 і A_1BC_1 перетинаються в одній точці.
2. Пряма l перетинає сторони трикутника ABC AB і AC в точках C_1 і B_1 , а продовження сторони BC — в точці A_1 . Доведіть, що описані кола трикутників ABC , A_1BC_1 , C_1AB_1 , B_1CA_1 перетинаються в одній точці.

Задача 2. (Пряма Сімпсона) На описаному колі трикутника ABC взято точку P . Доведіть, що проєкції P на сторони трикутника лежать на одній прямій.

Задача 3. В гострокутному трикутнику ABC провели висоти AA_1 , BB_1 , CC_1 . Доведіть, що проєкції точки A_1 на AB , AC , BB_1 та CC_1 лежать на одній прямій.

Задача 4. В трапеції $ABCD$ $AB = BC = CD$, CH — висота. Доведіть, що перпендикуляр, проведений з H на AC , проходить через середину BD .

Задача 5. (Дуже важливий сюжет!) Дано трикутник ABC . Його вписане коло дотикається сторін AB , BC в точках C_0 , A_0 . Доведіть, що пряма A_0C_0 , бісектриса кута A і середня лінія трикутника, яка є паралельною до AB , перетинаються в одній точці.

Хілько Данило
dkhilko@ukr.net