Математичний бій 1, молодша ліга, група А

1. Нехай a, b, c – дійсні числа, що задовольняють умову:

$$\begin{cases} (a+b)(b+c)(c+a) = abc, \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3. \end{cases}$$

Доведіть, що $abc = 0$.

2. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ABC = \angle BCD = 60^\circ$, $AB = 5$, $CD = 4$. Знайдіть BC.

3. Числа x_k при натуральних k задані рівністю $x_k = 2^k - k$. Знайдіть усі натуральні n, для яких сума $1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ є степенем двійки з натуральним показником.

4. У країні є декілька міст, деякі з яких з'єднані дорогами (дороги перетинаються лише у містах). У кожному місті встановлена табличка, на якій написане число, що дорівнює довжині найменшого путі, що починається у цьому місті і проходить через усі міста (через деякі міста цей путь може проходити двічі). Доведіть, що не існує двох міст, для яких відношення чисел на табличках більше за $1,5$.

5. Числа a, b, c задовольняють рівності $\max(a,b) + \max(c,2011) = \min(a,c) + \min(b,2012)$. Доведіть, що $b \geq c$.

6. Чи можна у кожну клітинку нескінченної клітчатої площини записати по одному натуральному числу так, щоб в будь-якому горизонтальному чи вертикальному рядку всі числа були попарно взаємно прості і всі натуральні числа були використані рівно один раз?

7. Тимур написав на дошці натуральне число. Щохвилини він домножає його на 3, закреслює після цього його довільну цифру, крім першої (якщо це можливо), і витирає старе. Доведіть, що рано чи пізно на дошці з'явиться число 1.

8. Чи можна розрізати квадрат 5×5 на 7 триклітинкових кутків та один квадрат 2×2.

9. На стороні BC гострокутного трикутника ABC побудован квадрат $BCDE$ вершинами назовні. AN – висота трикутника ABC, точка M на промені AN така, що $AM = BC$. Через точку B провели пряму $l \perp DM$, а через точку C – пряму $s \perp EM$. Доведіть, що прямі l та s перетинаються на прямій AN.

10. n – натуральне число більше за 1. Доведіть, що можна обрати n послідовних натуральних чисел, добуток яких ділиться на довільне просте число, що не перевищує $2n+1$, но не ділиться на довільне інше просте число.