Математичний бій 1, середня ліга, група А

1. Нехай a, b, c – дійсні числа, що задовольняють умову:

$$\begin{cases} (a+b)(b+c)(c+a) = abc, \\ (a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3. \end{cases}$$

Доведіть, що $abc = 0$.

2. Точка O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC, з кутом $\angle B = 30^\circ$. Промінь BO перетинає AC в точці K. Точка L — середина дуги OC описаного кола трикутника KOC, якій не належить точка K. Доведіть, що A, B, L, K лежать на одному колі.

3. Числа x_k при натуральних k задані рівністю $x_k = 2^k - k$. Знайдіть усі натуральні n, для яких сума $1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ є степенем двійки з натуральним показником.

4. Відомо, що квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ з цілими коефіцієнтами має раціональний корінь. Чи завжди abc парне?

5. Дано натуральне число n таке, що $n+1$ ділиться на $[\sqrt{n}] + 1$ $(n > 3)$. Доведіть, що тоді $(n-1)(n-3)$ ділиться на $[\sqrt{n}] - 1$.

6. Чи можна у кожну клітинку нескінченної клітчатої площини записати по одному натуральному числу так, щоб в будь-якому горизонтальному чи вертикальному рядку всі числа були попарно взаємно прості і всі натуральні числа були використані рівно один раз?

7. Назвемо клітинки головної діагоналі шахматної дошки "перепоною". В деякій клітинці, що не є перепоною, стоїть ладья. Їй дозволено пересуватися за шахматними правилами, але заборонено зупинятися в одній клітинці двічі (але можна проходити повз клітинок, в яких вона зупинялась), а також заборонено зупинятися у клітинках перепони. Яке найбільше число разів ладья зможе перепригнути через перепону?

8. До лагеря приїхало n незнайомих один з одним школярів: хлопців та дівчат. Богдан Владиславович сказав кожному школяру натуральне число так, що сума усіх n чисел дорівнює $2n-2$, та сума чисел у хлопців рівна сумі чисел у дівчат. Доведіть, що можна познайомити деяких з них один з одним так, що кожен має кількість знайомих, що рівна числу, яке їм сказав Богдан Владиславович, при цьому хлопці знайомі лише з дівчатами, а дівчата – лише з хлопцями.

9. На стороні BC гострокутного трикутника ABC побудован квадрат $BCDE$ вершинами назовні. AN – висота трикутника ABC, точка M на промені AN така, що $AM = BC$. Через точку B провели пряму $l \perp DM$, а через точку C – пряму $s \perp EM$. Доведіть, що прямі l та s перетинаються на прямій AN.

10. n – натуральне число більше за 1. Доведіть, що можна обрати n послідовних натуральних чисел, добуток яких ділиться на довільне просте число, що не перевищує $2n+1$, но не ділиться на довільне інше просте число.