VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Математичний бій №1. Старша ліга. Група B

Коли я був підлітком, я ненавидів життя і постійно знаходився на межі самогубства, від якого мене утримувало прагнення знати більше математики.

Бертран Рассел

1. Знайти усі невід'ємні цілі числа a та b, що задовольняють рівняння
$$a + 2b - b^2 = \sqrt{2a + a^2 + |2a + 1 - 2b|}.$$

2. Нехай a і b — два цілі числа такі, що $a > b$. Відомо, що $(ab - 1, a + b) = 1$ і $(ab + 1, a - b) = 1$. Доведіть, що $(ab + 1)^2 + (a - b)^2$ не є повним квадратом.

3. На чарівній дошці 50×50 посаджено сад таким чином, що на деяких клітинках дошки ростуть дерева: яблуні, груші або персики (не більше одного дерева в кожній клітинці). Ми знаємо, що принаймні одна яблуня дотикається до кожної груші, принаймні одна яблуня і одна груша дотикаються до кожного персика і принаймні одна яблуня, одна груша і один персик дотикаються до кожної вільної клітинки. Дерева дотикаються, якщо клітинки, на яких вони ростуть, мають спільну сторону. Доведіть, що порожніх клітинок не більше, ніж 1000.

4. Для додатних чисел a, b, c довести нерівність
$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geqslant 0.$$

5. Нехай $a_0 = 1$ і $a_{n+1} = a_0 \cdots a_n + 4,\ n \geqslant 0$. Доведіть, що $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ для усіх $n \in \mathbb{N}$.

6. Для яких натуральних $n > 2$ існують числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ такі, що послідовність $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1$ утворюватиме несталу арифметичну прогресію?

7. $ABCD$ — чотирикутник, у якому $AD = CD = BC < AB$ і $AB \parallel CD$. Точки E і F лежать на сторонах CD і BC так, що $\angle ADE = \angle AEF$. Доведіть, що $4CF \leqslant BC$.

8. Дошка 8×8 розділена на 64 квадратики. В деяких квадратиках провели діагоналі так, що жодні дві діагоналі на дошці не мають спільної точки (навіть вершини). Яка максимальна кількість діагоналей при цьому може виявитися на дошці?

9. У трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, AC, AB відповідно. Точки A_2 і A_3 лежать на прямій B_1C_1, точки B_2 і B_3 лежать на прямій A_1C_1, точки C_2 і C_3 лежать на прямій B_1C_1 так, що

$$AA_2 = AA_3 = BB_2 = BB_3 = CC_2 = CC_3.$$

Довести, що точки $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ — циклічні.

10. Таблицю 3×3 заповнили цифрами від 1 до 9 так, що усі цифри в таблиці присутні. У кожному стовпчику ми відмітили середнє за величиною число. Скільки існує заповнень таблиці цифрами, при яких виявиться так, що середнє серед цих відмічених чисел, дорівнюватиме 5?