VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Математичний бій №1. Старша ліга. Група A

Коли я був підлітком, я ненавидів життя і постійно знаходився на межі самогубства, від якого мене утримувало прагнення знати більше математики.

Бертран Рассел

1. Нехай многочлен $P(x) \in \mathbb{Z}_{[x]}$ і його степінь $\deg P(x) = n > 1$. Визначити найбільшу кількість послідовних цілих чисел у множині $\{P(x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

2. Нехай a і b — два цілі числа такі, що $a > b$. Відомо, що $(ab-1, a+b) = 1$ і $(ab+1, a-b) = 1$. Доведіть, що $(ab+1)^2 + (a-b)^2$ не є повним квадратом.

3. На чарівній дошці 50×50 посаджено сад таким чином, що на деяких клітинках дошки ростуть дерева: яблуні, груші або персики (не більше одного дерева в кожній клітинці). Ми знаємо, що принаймні одна яблуня дотикається до кожної груші, принаймні одна яблуня і одна груша дотикаються до кожного персика і принаймні одна яблуня, одна груша і один персик дотикаються до кожної вільної клітинки. Дерева дотикаються, якщо клітинки, на яких вони ростуть, мають спільну сторону. Доведіть, що порожніх клітинок не більше, ніж 1000.

4. У трикутнику ABC точка I — інцентр, точки M, N, P — середини його сторін, R, r — радіуси описаного і вписаного кіл трикутника ABC. Довести нерівність
$$IM^2 + IN^2 + IP^2 \geqslant r(R+r)$$

5. Знайти усі п'ятірки натуральних чисел (a, n, p, q, r), які задовольнять рівняння
$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1).$$

6. Для яких натуральних $n > 2$ існують числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ такі, що послідовність $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_na_1$ утворюватиме несталу арифметичну прогресію?

7. На сторонах гострокутного трикутника ABC зовнішнім чином побудувані трикутники $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ так, що
$$\angle ABC' = \angle A'BC = \angle CAB' = 30^\circ, \quad \angle BAC' = \angle AB'C = \angle BCA' = 90^\circ.$$
Доведіть, що, якщо M — середина сторони BC, то $B'M \perp A'C'$

8. Дошка 8×8 розділена на 64 квадратики. В деяких квадратиках провели діагоналі так, що жодні дві діагоналі на дошці не мають спільної точки (навіть вершини). Яка максимальна кількість діагоналей при цьому може виявитися на дошці?

9. У трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, AC, AB відповідно. Точки A_2 і A_3 лежать на прямій B_1C_1, точки B_2 і B_3 лежать на прямій A_1C_1, точки C_2 і C_3 лежать на прямій B_1C_1 так, що

$$AA_2 = AA_3 = BB_2 = BB_3 = CC_2 = CC_3.$$

Довести, що точки $A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3$ — циклічні.

10. Таблицю 3×3 заповнили цифрами від 1 до 9 так, що усі цифри в таблиці присутні. У кожному стовпчику ми відмітили середнє за величиною число. Скільки існує заповнень таблиці цифрами, при яких виявиться так, що середнє серед цих відмічених чисел, дорівнюватиме 5?