

## Навколо теореми Ейлера

1. **Теорема Ейлера.** У будь-якому зв'язному планарному графі із  $n$  вершинами,  $e$  ребрами і  $f$  гранями виконується співвідношення

$$n - e + f = 2.$$

2. **Теорема Сільвестра-Каллаї.** На площині дано  $n > 2$  точок, які не лежать на одній прямій. Доведіть, що знайдеться пряма, яка проходить рівно через дві точки.
3. На площині дано  $n > 2$  прямих, причому відомо, що через будь-яку точку перетину двох прямих, проходить ще одна із даних прямих. Доведіть, що усі прямі перетинаються в одній точці.
4. **Формула Піка.** Площа будь-якого многокутника  $Q$  (не обов'язково опуклого) із вершинами в  $\mathbb{Z}^2$  визначається за формулою

$$S_Q = n_i + \frac{1}{2}n_b - 1,$$

де  $n_i$  і  $n_b$  — кількість точок решітки  $\mathbb{Z}^2$  всередині і на границі многокутника  $Q$  відповідно.

- Площа елементарного трикутника з вершинами в  $\mathbb{Z}^2$  дорівнює  $\frac{1}{2}$ .
  - Припустимо, що ми можемо зробити тріангуляцію нашого многокутника.
  - Обчислимо площу нашого многокутника, після чого виразимо її через кількість внутрішніх і зовнішніх ребер.
  - Це майже все.
5. Вершини трикутника  $ABC$  розміщені у вузлах цілочисельної решітки, причому так, що на інших сторонах вузлів немає, а всередині є лише одна цілочисельна точка  $O$ . Доведіть, що  $O$  — центроїд трикутника  $ABC$ .