

## Трохи задач

Окуните ваши кисти в голубое  
По традиции забытой городской.

*Б. Окунджава*

1. Розфарбуйте квадрат  $4 \times 4$  в чорний і білий кольори так, щоб у кожній чорній клітинки було три білих сусіда, а у кожній білої клітинки був рівно один чорний сусід. (Сусідніми вважаються клітинки, що мають спільну сторону.)
2. Пряма розфарбована у два кольори. Довести, що знайдеться відрізок, обдива кінці і середина якого пофарбовані в один колір.
3. З протилежних кутів дошки  $10 \times 10$  вирізані два квадрати  $3 \times 3$ . Чи можна ту частину дошки, що залишилася розрізати на доміношки  $1 \times 2$ ?
4. Довести, що дошку  $6 \times 8$  без кутової клітинки не можна розрізати на прямокутники  $1 \times 3$ .
5. Квадрат а)  $5 \times 5$ ; б)  $8 \times 8$  розбили на декілька прямокутників  $1 \times 3$  і один квадрат  $1 \times 1$ . Де може стояти квадрат  $1 \times 1$ ?
6. Чи можна квадрат  $16 \times 16$  розбити на 64 прямокутники  $1 \times 4$ , з яких 31 буде стояти вертикально, а решта 33 — горизонтально?
7. Прямокутник  $m \times k$  розбитий на прямокутники  $1 \times 3$ . Довести, що  $mk$  ділиться на 3.
8. Квадрат  $8 \times 8$  розфарбовано у два кольори деяким чином. Дозволяється будь-який прямокутник  $1 \times 3$  перефарбувати в той колір, що й більшість клітинок у ньому. Довести, що таким операціями можна весь квадрат зробити однокольоровим.
9. Фігура носоріг може ходити на довільну кількість клітинок вправо, вниз і по діагоналі вгору-вліво. (Наприклад, з поля  $c1$  носоріг може перейти за один хід на  $a3$ , а на  $d2$  — не може.) Довести, що носоріг не зможе обійти всю шахову дошку і повернутися в початкове положення, навіть якщо в деяких клітинках можна бувати більше одного разу.
10. Яку найбільшу кількість а) королів, б) слонів, в) ферзів можна розмістити на шаховій дошці, щоб вони не били один одного?
11. Чи можна дошку  $6 \times 6$  замостити одинадцятьма прямокутниками  $3 \times 1$  і одним кутиком з трьох клітинок?
12. З аркуша клітчастого паперу розміром  $29 \times 29$  вирізали 99 квадратиків  $2 \times 2$  (ріжуть по лініям). Довести, що з решти клітинок можна вирізати ще хоча б один такий квадратик.