

Лема і Теорема Карно

1. Довести, що якщо перпендикуляри, опущені з точок A_1, B_1, C_1 на прямі BC, CA і AB відповідно, перетинаються в одній точці, то і перпендикуляри, опущені з точок A, B, C на прямі B_1C_1, C_1A_1 і A_1B_1 відповідно, перетинаються в одній точці.
2. Є чотирикутник $ABCD$. Точки A_1, B_1 і C_1 — ортоцентри трикутників B_1C_1D, A_1C_1D і A_1B_1D . Довести, що перпендикуляри, опущені з точок A, B і C на прямі B_1C_1, A_1C_1 і A_1B_1 перетинаються в одній точці.
3. Дано дві точки A і B та додатне число $k \neq 1$. Знайти геометричне місце точок M таких, що $AM : MB = k$.
4. Дано дві точки A і B та дійсні числа k, l, d такі, що $k + l \neq 0$. Довести, що геометричне місце точок M таких, що $k \cdot AM^2 + l \cdot BM^2 = d$ є або коло з центром на прямій AB , або точка, або порожня множина.
5. На сторонах AB і AC трикутника ABC взято точки M і N так, що $BM = CN$. Точки P і G — середини відрізків BN і CM відповідно. Довести, що бісектриса кута BAC перпендикулярна прямій PQ .