

Заняття 26.04.2011, Технічний ліцей, 10-й клас. Геометричні нерівності. Частина 3.

1. Нехай a та b — довжини сторін деякого трикутника. В яких межах може змінюватися третя сторона трикутника c ?
2. Доведіть, що якщо a, b, c — довжини сторін деякого трикутника, то $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$.
3. Нехай a, b, c — сторони деякого трикутника. Доведіть, що $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$. Чи справджується ця нерівність для довільної трійки додатних чисел?
4. Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника; A, B, C — величини протилежних до відповідних сторін кутів. Доведіть, що $Aa + Bb + Cc \geq \frac{1}{2}(Ab + Ba + Ac + Ca + Bc + Cb)$.
5. Сторони трикутника дорівнюють a, b, c . Відомо, що $a^3 = b^3 + c^3$. Доведіть, що трикутник гострокутний.
6. Відомо, що a, b та c — довжини сторін трикутника. Доведіть, що $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.