

Вагова нерівність Коші

Для довільних додатніх чисел m_1, m_2, \dots, m_n і невід'ємних x_1, x_2, \dots, x_n справджується нерівність

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \geq (x_1^{m_1} + x_2^{m_2} + \dots + x_n^{m_n})^{\frac{1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}}.$$

Вважаючи усі змінні додатніми, доведіть нерівності 1–4. Встановіть, коли досягається рівність.

1. $\frac{2a^3 + b^3}{3} \geq a^2 b.$

2. $a \cdot 2^b + b \cdot 2^{-a} \geq a + b.$

3. $(ax + by + cz)(bx + cy + az)(cx + ay + bz) \geq (a + b + c)^3 xyz.$

4. $\frac{1 + 3a\sqrt[3]{b}}{b} + \frac{1 + 3b\sqrt[3]{a}}{a} \geq 8.$

Вважаючи усі змінні невід'ємними, доведіть нерівності 5–9. Встановіть, коли досягається рівність.

5. $\frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{3} \geq \frac{a^3 b + b^3 a}{2}.$

6. $(a + b + c)^2 \geq 3(a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}).$

7. (ІМО-1983). $a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq abc(a + b + c).$

8. $\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n,$ де $n \geq 2.$

9. $\frac{a_1^4}{a_n a_2} + \frac{a_2^4}{a_1 a_3} + \dots + \frac{a_n^4}{a_{n-1} a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2,$ де $n \geq 2.$

10. (З екзаменів до Оксфордського університету). Нехай a, b, c — невід'ємні числа. Доведіть нерівність

$$abc \geq \min\{1, a^3, b^4, c^5\}.$$