

Школа № 52, заняття 10.12.2010. 10—11-ті класи. Функціональні рівняння.

1. Про функцію f відомо, що якщо $x < y$, то $f(x) > f(y)$. Нехай $a < b$. Що більше:
а) $f(f(a))$ чи $f(f(b))$?
б) $f(f(f(f(f(a))))))$ чи $f(f(f(f(f(b))))))$?
2. Функція f така, що для кожних x та y справджується рівність $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Відомо, що $f(5) = 1$. Знайдіть:
а) $f(100)$;
б) $f(1)$;
в) $f(1/2)$;
г) $f(2/3)$.
3. Функція f для довільних дійсних чисел x, y задовольняє рівність: $f(x + y) = f(x) + f(y) + 80xy$. Відомо, що $f(1/4) = 2$. Знайдіть:
а) $f(1/2)$;
б) $f(1)$;
в) $f(2/3)$.
4. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що для всіх дійсних x задовольняють рівність $f^2(x) = f(x)$ (тут через $f^2(x)$ позначено квадрат значення функції f у точці x).
5. Наведіть кілька прикладів функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ та $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, що задовольняють співвідношення $f(f(x)) = f(x)$. Доведіть, що функцій $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, які задовольняють це співвідношення, є нескінченно багато.
6. Знайдіть усі такі $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, що $f(x + 1) = f(x) + 1$.
7. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такі, що $f(x + y) = f(x) + f(y)$.