

Функционалки

1. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z).$$

2. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(x - y) = f(x + y)f(y)$$

3. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(f(x) + y) = f(f(y) - x) + 2x.$$

4. Найдите все $f : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$, что для любых x, y выполняется

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$$

и $f(x)/x$ монотонно возрастает на $(-1; 0)$ и $(0; +\infty)$.

5. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy.$$

6. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) - 2x^2f(y) + f(y^2).$$

7. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(x)f(yf(x) - 1) = x^2f(y) - f(x).$$

8. Найдите все $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых x, y выполняется

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y) + 2xy.$$