Математичний бій 3, молодша ліга, група А

1. На вечірку прийшло $2n$ людей. Виявилось, що у всіх людей парна кількість знайомих. Доведіть, що знайдуться двоє людей, які мають парну кількість спільних знайомих.

2. На стороні BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C обрана точка P. З точки C проведені перпендикуляри CN на AP та CM на AB. На відрізку AP обрана точка L така, що $AL = CN$. Доведіть, що $\angle LMN = 90°$.

3. Камінці, які були скаладені у дві купки, зібрали й розклали в три купки. Доведіть, що не менш, ніж два камінці опинилися в купках, що менші, ніж попередні.

4. Два натуральних числа d та d' ($d' > d$) є дільниками числа n. Доведіть, що $d' > d + \dfrac{d^2}{n}$.

5. На продовженні сторони BC рівностороннього трикутника ABC за точку C обрано точку N. Точка M на відрізку AC така, що $BM = MN$. Доведіть, що $AM = CN$.

6. Числа x та y задовольняють нерівність $y^3x + 1 < x + y^3$. Доведіть, що $x^3y + 1 < y + x^3$.

7. Знайдіть усі цілі m та n такі, що $9m^2 + 3n = n^2 + 8$.

8. Доведіть, що дійсне число x є цілим тоді і тільки тоді, коли для кожного натурального n має місце рівність $[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [nx] = \dfrac{n([x] + [nx])}{2}$.

9. У квадраті 8×8 декілька клітинок — чорні, а інші — білі. Цей малюнок продовжується на усю площину із періодом 8 по вертикалі та горизонталі. Відомо, що у будь-якої клітинки на площині не менше одного чорного сусіда (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Яка найменша кількість чорних клітинок могла бути в початковому квадраті?

10. Числа a, b, c задовольняють умови: $a + b - c = 2$, $2ab - c^2 = 4$. Знайдіть a, b, c.