Математичний бій 3, середня ліга, група B

1. В Односторннньому графстві між деякими (але, на жаль, ще не між всіма) садибами прокладено дороги, і на кожній вказано односторонній напрямок руху. Відомо, що не з кожної садиби можна дістатися до будь-якої іншої. Доведіть, що можна провести односторонню дорогу між деякими двома садибами (між якими ще немає дороги) так, що й тепер не з кожної садиби можна буде дістатися до будь-якої іншої.

2. Знайдіть усі цілі m та n такі, що $9m^2 + 3n = n^2 + 8$.

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки T_1 й T_2 є серединами сторін AB й CD відповідно. Відомо, що пряма T_1T_2 перетинає діагоналі AC й BD під однаковими кутами. Доведіть, що діагоналі AC й BD рівні.

4. Графіки лінійних функцій $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$, $y = k_4x + b_4$, жодний з яких не є паралельним осі абсцис, обмежують на кординатній площині паралелограм, у якому лежить початок кординат. Визначте знак добутку $k_1k_2k_3k_4b_1b_2b_3b_4$.

5. Камінці, які були скаладені у дві купки, зібрали й розклали в три купки. Доведіть, що не менш, ніж два камінці опинились в купках, що менші, ніж попередні.

6. Сума чотирьох натуральних чисел a, b, c, d — просте число p. Доведіть, що $ab - cd$ не ділиться на p.

7. На стороні BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C обрана точка P. З точки C проведені перпендикуляри CN на AP та CM на AB. На відрізку AP обрана точка L така, що $AL = CN$. Доведіть, що $\angle LMN = 90°$.

8. У квадраті 8×8 декілька клітинок — чорні, а інші — білі. Цей малюнок продовжується на усю площину із періодом 8 по вертикалі та горизонталі. Відомо, що у будь-якої клітинки на площині не менше одного чорного сусіда (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Яка найменша кількість чорних клітинок могла бути в початковому квадраті?

9. Відомо, що p – корінь рівняння $x^3 + bx + c = 0$. Доведіть, що виконується нерівність $b^2 \geq 4pc$.

10. Відомо, що a, b, c — цілі числа такі, що $3a + 1004b + 2006c = 0$. Доведіть, що число $N = 2ac - 3a^2$ ділиться на 2008.