Математичний бій 3, середня ліга, група А

1. На вечірку прийшло $2n$ людей. Виявилось, що у всіх людей парна кількість знайомих. Доведіть, що знайдуться двоє людей, які мають парну кількість спільних знайомих.

2.Знайдіть усі цілі m та n такі, що $9m^2 + 3n = n^2 + 8$.

3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки T_1 й T_2 є серединами сторін AB й CD відповідно. Відомо, що пряма T_1T_2 перетинає діагоналі AC й BD під однаковими кутами. Доведіть, що діагоналі AC й BD рівні.

4. Графіки лінійних функцій $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$, $y = k_4x + b_4$, жодний з яких не є паралельним осі абсцис, обмежують на кординатній площині паралелограм, у якому лежить початок кординат. Визначте знак добутку $k_1k_2k_3k_4b_1b_2b_3b_4$.

5. Камінці, які були скаладені у дві купки, зібрали й розклали в три купки. Доведіть, що не менш, ніж два камінці опинились в купках, що менші, ніж попередні.

6. Сума чотирьох натуральних чисел a, b, c, d – просте число p. Доведіть, що $ab - cd$ не ділиться на p.

7. На продовженні сторони BC рівностороннього трикутника ABC за точку C обрано точку N. Точка M на відрізку AC така, що $BM = MN$. Доведіть, що $AM = CN$.

8. У квадраті 8×8 декілька клітинок — чорні, а інші — білі. Цей малюнок продовжується на усю площину із періодом 8 по вертикалі та горизонталі. Відомо, що у будь-якої клітинки на площині не менше одного чорного сусіда (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Яка найменша кількість чорних клітинок могла бути в початковому квадраті?

9. Відомо, що p — корінь рівняння $x^3 + bx + c = 0$. Доведіть, що виконується нерівність $b^2 \geq 4pc$.

10. Нескінченна послідовність $a_1, a_2, a_3, \ldots$ складених натуральних чисел задається наступним чином: $a_{n+1} = a_n - p_n + \dfrac{a_n}{p_n}$, де p_n — найменший простий дільник a_n. Відомо, що всі члени послідовності діляться на 37. Яке значення може приймати число a_1?