VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Математичний бій №3. Старша ліга. Група А

Я люблю роботу, вона зачаровує мене. Я можу сидіти і дивитися на неї годинами.

Джером К. Джером

1. Нехай $\overline{abc}$ — просте число (в десятковій системі числення). Доведіть, що $b^2 - 4ac$ не може бути повним квадратом.

2. Знайдіть усі $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних x, y справджується співвідношення
$$f^9(x) + f^9(y) = f(x + y).$$

3. Нехай A — скінченна множина додатних дійсних чисел, $B = \{x/y \mid x, y \in A\}$ і $C = \{xy \mid x, y \in A\}$. Доведіть, що $|A| \cdot |B| \leqslant |C|^2$.

4. У госторокутному трикутнику ABC точка M — середина сторони BC, точки D, E, F — основи висот, опущених з вершин A, B, C відповідно, H — ортоцентр трикутника ABC, точка S — середина відрізка AH і G — точка перетину FE і AH. Нехай N — точка перетину медіани AM з колом, описаним навколо трикутника BCH. Доведіть, що $\angle HMA = \angle GNS$.

5. Назвемо розфарбування дошки $n \times n$ у два кольори (чорний і білий) прекрасним, якщо у будь-якому квадратику 2×2 клітинок білого кольору — непарна кількість. Знайти усі n, при яких існуватиме таке прекрасне розфарбування, що на дошці не буде двох однакових стовпчиків.

6. Нехай O — фіксовна точка на площині. Знайти усі множини S точок на площині, що складаються принаймні з двох точок, і задовольняють умову: якщо $A \in S$ і $A \neq O$, то і коло з діаметром OA належить S.

7. Доведіть, що рівняння $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 2011$ має нескінченно багато розв'язків (x, y, z, t) в цілих числах.

8. Нехай $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ — три кола, що розміщені всередині трикутника ABC так, що кожні два дотикаються між собою, Γ_A дотикається до сторін AB і AC, Γ_B — сторін BC і BA і Γ_C — сторін CA і CB. Нехай D — точка дотику Γ_B і Γ_C, E — точка дотику Γ_C і Γ_A і F — точка дотику Γ_A і Γ_B. Довести, що прямі AD, BE і CF — конкурентні.

9. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a + b + c + 1 = 4abc$, доведіть нерівність
$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leqslant 3.$$

10. Знайти найбільше число a таке, що для будь-якої перестановки чисел $1, 2, \ldots, 10$ на колі ми завжди зможемо знайти три числа, розміщених поспіль, таких, що їхня сума буде не менша, ніж a.