VI-й Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка Ляшка І.І.

Математичний бій №3. Старша ліга. Група B

Я люблю роботу, вона зачаровує мене. Я можу сидіти і дивитися на неї годинами.

Джером К. Джером

1. Нехай $\overline{abc}$ — просте число (в десятковій системі числення). Доведіть, що $b^2 - 4ac$ не може бути повним квадратом.

2. Знайти усі $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних x, y справджується співвідношення
$$(x+y)\big(f(x) - f(y)\big) = f(x^2) - f(y^2).$$

3. Гросмейстер має 77 днів на підготовку до турніру. Він хоче грати не менше однієї партії щодня, але щоб не перевтомитися, — не більше 132 партії за весь час підготовки. Доведіть, що знайдуться декілька днів підряд, протягом яких він зіграє рівно 21 партію.

4. У трикутнику ABC, точка O — центр описаного кола, I — інцентр. Нехай X — точка, симетрична I відносно точки O, A_1 — основа перпендикуляра, опущеного із X на BC. Аналогічно визначимо точки B_1 і C_1. Доведіть, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні (перетинаються в одній точці).

5. Назвемо розфарбування дошки $n \times n$ у два кольори (чорний і білий) прекрасним, якщо у будь-якому квадратику 2×2 клітинок білого кольору — непарна кількість. Знайти усі n, при яких існуватиме таке прекрасне розфарбування, що на дошці не буде двох однакових стовпчиків.

6. Знайти усі трійки (x, y, z) натуральних чисел, що задовольняють систему рівнянь
$$\begin{cases} x^2 = 2(y+z) \\ x^6 = y^6 + z^6 + 31(y^2+z^2) \end{cases}$$

7. Нехай $f(n)$ — кількість дільників числа $n^2 + n + 1$, де $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що існує нескінченно багато таких $n \in \mathbb{N}$, для яких $f(n) \geqslant f(n+1)$.

8. AL — бісектриса трикутника ABC. На сторонах AB і AC обрали точки M і N таким чином, що прямі AL, BN, CM — конкурентні і $\angle ALB = \angle ANM$. Доведіть, що $\angle MNL = 90^\circ$.

9. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a+b+c+1 = 4abc$, доведіть нерівність
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 3.$$

10. Знайти найбільше число a таке, що для будь-якої перестановки чисел $1, 2, \ldots, 10$ на колі ми завжди зможемо знайти три числа, розміщених поспіль, таких, що їхня сума буде не менша, ніж a.