Математичний бій 3, молодша ліга, група B

1. У клітинках дошки 10×10 написані по одному разу числа від 1 до 100. Доведіть, що знайдеться клітинка, у якій написано число, яке більше за одне з чисел, написаних у сусідніх по стороні або куту клітинках, та менше за інше таке число.

2. На стороні BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C обрана точка P. З точки C проведені перпендикуляри CN на AP та CM на AB. На відрізку AP обрана точка L така, що $AL = CN$. Доведіть, що $\angle LMN = 90°$.

3. Камінці, які були скаладені у дві купки, зібрали й розклали в три купки. Доведіть, що не менш, ніж два камінці опинилися в купках, що менші, ніж попередні.

4. Розв‘яжіть в натуральних числах рівняння $x^2 - 3^y = 16$.

5. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle ADC = 90°$, $\angle BCD = 78°$, $\angle CAB = \angle CBA$ та $AB = 2AD$. Знайдіть $\angle CAD$.

6. Числа x та y задовольняють нерівності $y^3x+1 < x+y^3$. Доведіть, що $x^3y+1 < y + x^3$.

7. Відомо, що a, b, c — цілі числа такі, що $3a + 1004b + 2006c = 0$. Доведіть, що число $N = 2ac - 3a^2$ ділиться на 2008.

8. Доведіть, що дійсне число x є цілим тоді і тільки тоді, коли для кожного натурального n має місце рівність $[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [nx] = \dfrac{n([x] + [nx])}{2}$.

9. У квадраті 8×8 декілька клітинок — чорні, а інші — білі. Цей малюнок подовжується на усю площину із періодом 8 по вертикалі та горизонталі. Відомо, що у будь-якої клітинки на площині не менше одного чорного сусіда (сусідніми вважаються клітинки, які мають спільну сторону). Яка найменша кількість чорних клітинок могла бути в початковому квадраті?

10. Сім чисел такі, що сума будь-яких трьох з них менша за суму чотирьох останніх. Доведіть, що усі числа додатні.