

Теорія Чисел

1. Камінці лежать в трьох кучах: в одній – 51 камінець, в другій – 49, а в третій – 5 камінців. Дозволяється об'єднати будь-які дві кучі в одну, а також розділити кучу з парною кількістю камінців на дві однакові. Чи можна отримати 105 кучок по одному камінцю?
2. Доведіть, що серед будь-яких n натуральних чисел є кілька сума яких ділиться на n .
3. Коли порівняння $a \equiv b \pmod{m}$ і $ac \equiv bc \pmod{m}$ рівносильні?
4. Доведіть, що якщо дві останні цифри цілого числа непарні, то це число не може бути квадратом цілого числа.
5. Відомо, що $p, 8p^2 + 1$ - прості. Знайдіть p .
6. Відомо, що числа $p, p^2 + 2$ - прості. Доведіть, що число $p^3 + 2$.
7. Знайдіть скінченну арифметичну прогресію з різницею 6 максимальної довжини, що складається лише з простих чисел.
8. Нехай m - добуток перших n простих чисел. Доведіть, що ні одне з чисел $m-1, m+1$ не є квадратом.
9. В яких випадках має розв'язки порівняння $ax \equiv b \pmod{m}$. Опишіть всі розв'язки цього порівняння в множині остач.
10. Доведіть, що число $m = a^2 + b^2$ ($\text{НСД}(a, b) = 1$) не має простих дільників вигляду $4k + 3$.