

Степень точки и радикальные оси

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Упражнение 1. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1 . Докажите, что H , O , C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

Задача 1. M — произвольная точка плоскости AH , BK и CL — высоты треугольника ABC . Докажите, что описанные окружности треугольников AHM , BKM и CLM пересекаются ещё в некоторой точке, отличной от точки M .

Задача 2. Пусть I — инцентр треугольника ABC ($AB < AC$), M — середина BC , а N — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что $\angle ANI = \angle IMB$.

Задача 3. Дан правильный треугольник ABC и окружность ω , которая касается AB в точке B , а AC — в точке C . Прямая, которая проходит через A , пересекает ω в точках D и E . Пусть O — центр ABC . Докажите, что B , O и середины отрезков CD и CE лежат на одной окружности.

Задача 4. Окружность, проходящая через вершины A и C , треугольника ABC пересекает стороны AB , BC в точках A_1 , C_1 соответственно; H , H_1 — ортоцентры треугольников ABC , A_1BC_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1 , CC_1 , HH_1 конкурентны.

Задача 5. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты BE и CF . Две окружности, которые проходят через A и F касаются прямой BC в разных точках P и Q , так что B лежит между C и Q . Докажите, что прямые PE и QF пересекаются на описанной окружности треугольника AEF .