**Київські відбори. Розв’язання задач**

***3 тур***

8 клас

**1.** Для додатних чисел справджується рівність:

.

Доведіть, що серед чисел є принаймні два рівних.

***Розв’язання.*** Зведемо все до спільного знаменника та перенесемо все в один бік:

.

Помітимо, що:

Оскільки числа додатні, то одна з перших трьох дужок має бути нульовою, що й завершує доведення.

**2*.*** Мураха стартує з вершини кубу . Вона блукає протягом хвилин, при цьому за кожну хвилину вона переходить вздовж одного ребра у сусідню вершину. Позначимо через кількість таких мандрівок, що закінчуються, у вершині , а через – що закінчуються, у вершині . Знайдіть величину .

***Відповідь*:** .

***Розв’язання.*** Позначимо через - кількість шляхів, якими мураха дістанеться до вершини рівно за кроків. Очевидно, що така сама кількість дістатися за кроків до та . Аналогічно позначимо через - кількість шляхів, якими мураха дістанеться до вершини ( або ) рівно за кроків, а через - кількість шляхів, якими мураха дістанеться до вершини , і нарешті через - кількість шляхів, якими мураха повернеться до вершини .

Тоді неважко записати такі рівності (рис. 1):

, , , .

Звідси

 та ,

тому остаточно маємо, що

.

**3.** У рівнобедреному трикутнику з кутом при вершині провели бісектрису . Доведіть, що .

***Розв’язання.*** Проведемо промінь , а також побудуємо промінь , для якого та -- точка перетину цих променів (рис. 1). Тоді для точка - точка перетину бісектрис, а тому також бісектриса. Оскільки та , то чотирикутник - вписаний. Тому з рівності кутів випливає рівність відрізків (хорд) . Тому . Оскільки , то - рівнобедрений. Звідси і остаточно маємо, що .

**4.** Знайдіть усі цілі невідємні , які задовольняють рівність:

.

***Відповідь*:** , та , .

***Розв’язання.*** При маємо, що , тоді , тоді . Тому , звідки маємо, що .

Тепер розглянемо модуль . Тоді . Число . Тому з рівності:

,

маємо, що . Але . А тут маємо, що за модулем може приймати лише такі остачі: . Одержана суперечність доводить, що шукані розв’язки повинні задовольняти умові або .

При маємо, що , звідки .

При маємо, що , звідки .

9 клас

**1.** Якого типу трикутник зі сторонами , якщо вони задовольняють умову:

?

***Відповідь*:** прямокутний.

***Розв’язання.*** Якщо зробити перетворення, то матимемо, що

.

Звідси зрозуміло, що трикутник прямокутний.

**2.** Задача 8–2 **().**

**3.** Задача 8–4 **().**

**4.** У гострокутному трикутнику , у якого . Центр описаного навколо нього кола позначимо через . Точка -- середина сторони , -- висота . Позначимо через та - другі точки перетину прямих та з колом . Точка - ортогональна проекція точки на пряму , точка - ортогональна проекція точки на пряму , точка - середина відрізку . Доведіть, що .

***Розв’язання.*** Спочатку доведемо, що . Позначимо через - точку, що симетрична точці відносно (рис. 1). За побудовою - середня лінія , тому , оскільки та , то . Оскільки - діаметр, то . Звідси , звідки - середня лінія , що доводить потрібну рівність.

Тепер доведемо, що , звідки буде випливати потрібне твердження. Позначимо через - основу перпендикуляра з точки на . Тоді . Крім того , звідси . З одержаної вище рівності маємо, що , звідки випливає шукана подібність прямокутних трикутників.

10 клас

**1.** Задача 9–1 **().**

**2.** На площині провели прямих загального положення (жодні три не перетинаються в одній точці, та жодні дві не паралельні). Ці прямі розбивають площину на частини. Скільки мінімум серед цих частин може бути кутів?

***Відповідь*:** .

***Розв’язання.*** Розглянемо усі точки перетину усіх цих прямих. Тоді розглянемо опуклу оболонку цих точок (найменший опуклий багатокутник , що містить задану множину). У кожній вершині цього багатокутника перетинаються дві прямі, які точно утворюють кут. Таким чином мінімальна їх кількість – три. Покажемо, що це значення досягається. Проведемо прямі таким чином. Дві з них – координатні осі. Решта прямих мають такі рівняння: , . Будь-які дві прямі, що не є осями, оскільки кожні 4 промені, що утворюються при перетині цих двох прямих, перетинає одну з осей.

**3.** Задача 9–4 **().**

**4.** Дві точки на декартовій площині з цілими координатами називаються «парою», якщо на відрізку немає інших точок з цілими координатами. Послідовність точок з цілими координатами називається «полігоном», якщо виконуються такі умови:

* пари утворюють точки , а також ;
* жодні інші точки цієї послідовності пару не утворюють;
* жодні три точки цієї послідовності не лежать на одній прямій;

Чи існує полігон, що містить 100 точок?

***Відповідь*:** існує.

***Розв’язання.*** Неважко зрозуміти, що дві точки та , що не лежать на одній горизонтальній чи вертикальній прямій, утворюють пару тоді і тільки тоді, коли та -- взаємно прості числа.

На параболі жодні три точки не колінеарні. Оскільки , то точки на параболі та утворюють пару тоді і тільки тоді, коли . Тому точки задовольняють умову задачі, якщо ми знайдемо до них точку .

Очевидно, що взаємно просте з тоді і тільки тоді, коли для будь-якого цілого воно також взаємно просте з . Точка утворює пару з точкою , бо у них різниця ординат дорівнює , аналогічно пару утворюють з точкою точки для довільного цілого . Аналогічно не утворює пару з .

Таким чином не утворює пару з кожною з точок , …, . Якщо позначити НСК чисел від до , тоді точки не утворює пару з кожною з точок , …, .

Оскільки та , то вони взаємно прості з усіма числами від до , та взаємно прості з . Відповідно до китайської теореми про остачі існує таке ціле , для якого виконуються умови:

, та .

Тоді точка в якості вибору задовольняє перші дві умови. Оскільки для вибору є нескінченна кількість варіантів, а тих, що виключаються третьою умовою, лише скінченна кількість, тому шукані існують.

11 клас

**1.** Задача 10–2 **().**

**2.** Додатні числа задовольняють умову . Доведіть нерівність:

.

***Розв’язання.*** Розглянемо такі перетворення: , з нерівності між середніми маємо, що , а тому попередня нерівність підсилюється таким чином: . Якщо тепер додати аналогічні 3 нерівності, матимемо:

.

**3.** У гострокутному трикутнику на висоті з вершини всередині трикутника вибрана така точка , для якої . На продовженнях висот з вершин та за вибрані точки та відповідно таким чином, щоб . Доведіть, що точки лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли довжина дотичної з точки до кола дев’яти точок дорівнює сумі дотичних до цього кола з вершин та .

***Розв’язання.*** Позначимо основи висот відповідно (рис. 1) а коло 9 точок -- .

Доведемо спочатку необхідність. Нехай точки колінеарні. Запишемо степінь точки відносно кола :

.

Таким чином дотичні від точки до кола дорівнює . Аналогічно довжини дотичних від точок до кола дорівнюють відповідно . За припущенням точки лежать на одній прямій, тобто та

. **(1)**

Тоді , з аналогічних міркувань , . Тоді з (1) маємо, що , чотирикутник - вписаний, та . Звідси

 .

Тому та . Звідси одержуємо, що і далі , що й треба було довести.

Доведення достатності базується на такій лемі.

*Лема*. Нехай - два перпендикулярних кола, що перетинаються в точках . Тоді на прямій існує рівно дві точки , що задовольняють такі умови. Якщо - дотичні до кіл відповідно такі, що лежать по різні боки від прямої . Тоді точки лежать на одні прямій. Більше того, ці дві точки симетричні відносно лінії центрів кіл та степінь цих точок відносно дорівнює , де - радіуси кіл .

*Доведення леми*. Зауважимо, що якщо точка задовольняє умови, то

.

Оскільки , то

Звідси легко знайти по колах відповідні точки .

З умови випливає, що , тобто точка лежить на радикальній осі цих кіл. З іншого боку з шестикутника маємо, що

.

Тому , звідки

.

*Лема доведена.*

Повернемось до основної задачі. Оскільки коло з центром у точці та радіусом перпендикулярна колу з центром у точці та радіусом оскільки . Більше того, оскільки

,

то - дотична до кола у точці і - дотична до кола у точці . З іншого боку , що відповідає умові з леми. Тому з тієї леми - колінеарні.

**4.** Задача 10–4 **().**