**Київські відбори. Розв’язання задач**

***2 тур***

8 клас

**1.** Для яких натуральних  квадрат  можна покрити прямокутниками , можливо у декілька шарів? Покрити у декілька шарів уданому випадку означає, що кожна комірка  покрита однаковою кількістю прямокутників. Жоден прямокутник не повинен виходити за межі дошки.

**Рис. 1**









































































***Відповідь:*** Для.

***Розв’язання*.** Те, що для вказаних  покриття, що задовольняє умові, існує – очевидно.

При  розглянемо шахове розфарбування дошки. Припустимо, що існує шукане покриття квадрату у  шари. Чорні клітини ототожнимо з «», а білі з – «». Без обмеження загальності вважаємо, що кутові поля дошки – чорні, тобто їх на 1 більше. Тоді сума усіх чорних  та білих  полів дорівнює . Позначимо значення комірки – сумарну кількість її покриттів. Тоді сумарне значення по усіх комірках складає , але з іншого боку у кожному прямокутнику покриття  сума значень дорівнює нулеві. А тому і сума усього покриття повинна дорівнювати нулеві.

Нехай тепер , розглянемо розфарбування у 4 кольори, як це показане на рис 1. У правому нижньому квадратові немає 4-го кольору, зрозуміло, що така ситуація буде для усіх квадратів наведеного розміру. Задамо кольорам 1 та 4 вагу «+1», а 2 та 3 кольорам – вагу «-1». Тоді аналогічно попередньому пункту, маємо, що сумарна вага усього покриття . Але сума у кожному прямокутнику дорівнює , одержана суперечність завершує доведення.

**2.** На круглому треку одночасно в одному напрямі почали рух з постійними але попарно різними швидкостями  велосипедистів. У одного з них є фляга з водою. У момент, коли відбувається зустріч двох велосипедистів, у одного з яких фляга, відбувається миттєва передача цієї фляги другому велосипедисту. Відомо, що зустріч трьох велосипедистів в одній точці неможлива.

***а)*** Чи може так трапитись, що існують два велосипедисти, до яких фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

***б)*** Чи може так трапитись, що існує один велосипедист, до якого фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

***Відповідь*: *а)*** ні**; *б)*** так.

***Розв’язання*.** ***а)*** Методом від супротивного. Нехай існують такі два велосипедисти, позначимо їх А та Б. Нехай А їздить швидше Б, розглянемо момент зустрічі цих велосипедистів. І дугу між ними. У момент зустрічі дуга нульова і фляжки на ній немає. Після того, дуга між ними починає збільшуватись до того моменту, коли стане цілим колом під час наступної зустрічі. Але тоді фляжка знаходиться всередині дуги. Тому зрозуміло, що був момент, коли вона перетнула межі дуги, тобто пройшла через точку А чи Б, а тому принаймні один з них мав отримати фляжку.

***б)*** Побудуємо приклад руху трьох велосипедистів. Без обмеження загальності можемо вважати, що найповільніший з них стоїть на місті, а решта рухається у додатному напрямі. Нехай у початковий момент фляга у велосипедиста А, який стоїть у точці . Велосипедист В має швидкість  і стоїть у точці , С має швидкість  і стоїть у тій самій точці, що й В. Тоді можна відмітити такі принципові кроки їх руху (рис. 2).

Початок зображений на першій діаграмі. Після того, як В проїде півкола і попаде в точку , де стоїть А, С попадає в точку  (друга діаграма), і фляга переходить до В. Наступний момент, коли В знову проїжджає півкола, а С – чверть кола. Далі В проїжджає ще півкола і попадає у точку , а С – чверть кола і попадає в точку , де стоїть А, але фляга зараз у В (третя діаграма). Далі після наступного півкола В він попадає в точку , де стоїть А і передає йому флягу, а С – у точку  (четверта діаграма). Ще після півкола виникає початкова ситуація (п’ята діаграма), і далі все циклічно повторюється.

**Рис. 2**





















**3.** Розв’яжіть у простих числах  рівняння:

.

***Відповідь*:**  та .

***Розв’язання*.** Очевидно, що усі прості  числа повинні бути непарними. З малої теореми Ферма маємо, що . Тоді, . Але тоді . Звідси одразу бачимо, що . Тоді, підставивши маємо: , звідки , звідки  або навпаки.

**Рис. 3**















**4*.*** Точка  лежить всередині трикутника  і задовольняє умові , точка  така, що  – паралелограм. Доведіть, що .

***Розв’язання*.** Розглянемо таку точку, для якої  - паралелограм. Нескладно побачити,  та , звідси  (рис. 3). Позначимо через .

Тоді . Оскільки , то . Тому точки  лежать на одному колі. Звідки , а тому .

9 клас

**Рис. 4**

**1.** Задача 8–2**.**

**2.** Для яких натуральних  квадрат  можна покрити -тетраміно (рис. 4) можливо у декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка  покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі. Жодна фігурка не повинна виходити за межі дошки.

**Рис. 5**

***Відповідь:*** ні для яких.

***Розв’язання*.** При  розглянемо шахове розфарбування дошки. Припустимо, що існує шукане покриття квадрату у  шари. Чорні клітини ототожнимо з «», а білі з – «». Без обмеження загальності вважаємо, що кутові поля дошки – чорні, тобто їх на 1 більше, тому сума усіх чорних  та білих  полів дорівнює . Позначимо значення комірки – сумарну кількість її покриттів. Тоді сумарне значення по усіх комірках складає , але з іншого боку у кожній фігурці покриття сума значень дорівнює нулеві. А тому і сума усього покриття повинна дорівнювати нулеві.

При  припустимо це можливе, при цьому покриття здійснено у  шари. Пофарбуємо клітини, як це показане на рис. 5. Неважко підрахувати, що ми маємо  чорних клітин. Помістимо у чорні клітини вагу «-3», а у білі – вагу «+1», окрім верхньої лівої клітини, куди покладемо вагу «+2».

А тепер підрахуємо різницю ваг білих  та чорних  клітин:

,

а тому сумарно ця оцінка дорівнюватиме .















**Рис. 6**

А тепер підрахуємо сумарну вагу кожного тетраміно, що покладене на квадрат. Якщо воно не покриває лівий верхній квадратик, то вага не додатна, а якщо покриває, то від’ємна. У кожному шарі покриття буде принаймні одне таке тетраміно, тому сумарна вага усього покриття від’ємна, що суперечить обчисленій вище оцінці.

**3.** Задача 8–3**.**

**4.** Вписаний у коло чотирикутник  задовольняє умови ,  – точка перетину діагоналей чотирикутника,  – центр кола вписаного у ,  – точка перетину прямої  та описаного кола , відмінна від . Доведіть, що .

***Розв’язання*.** Позначимо через , з рівності  маємо , з вписаності чотирикутника  маємо, що , , звідси  (рис. 6).

Тоді маємо такі рівності:



.

Оскільки  – вписаний, то . Тоді з  маємо:

.

Тоді

.

Разом з рівністю , яка випливає з вписаних кутів, маємо, що . Тому  або . З рівності  маємо, що  – рівнобедрений з вершиною в точці , тобто , звідки й маємо шукану рівність: .

10 клас

**1.** Дійсні числа такі, що . Розв’яжіть систему нерівностей:



***Відповідь:*** .

***Розв’язання*.** Запишемо, що . Тоді друга нерівність набуває вигляду: . Додамо цю нерівність та першу нерівність:

.

Оскільки для довільного додатного числа  справджується нерівність:  і рівність має місце лише при , маємо, що ліва частина не менша за праву частину. Тому повинні виконуватись умови: , звідки знаходимо єдину трійку дійсних чисел , що задовольняє умову: .

**2.** Задача 9–2**.**

**3.** Задача 9–4**.**

**4.** Послідовність ,  задана умовами , , та  для усіх натуральних . Знайдіть усі прості числа  для яких існує натуральне  таке, що  ділить число .

***Відповідь:*** кожне просте .

***Розв’язання*.** Покладемо , тоді , , . З рекурентного співвідношення випливає, що  має вигляд . Легко перевірити, що , де  – послідовність чисел Фібоначчі. Доведемо, що кожне просте  задовольняє умову. Для  все очевидне, тому далі нехай . Запишемо, що . З малої теореми Ферма, маємо, що якщо  та , то . Зауважимо далі, що якщо два послідовних числа Фібоначчі за модулем  дорівнюють , то за цим модулем  ми однозначно визначимо попередню та наступну пари. Крім того, різних пар остач – скінченна кількість, тому пари остач зациклюються. Нам треба довести, що пара  зустрінеться серед остач послідовних чисел Фібоначчі. Порахуємо числа Фібоначчі в лівий бік: , , … Як бачимо, для пари  маємо шукану пару остач, а тому вона точно ще зустрінеться для доданих індексів чисел Фібоначчі.

Для  умова очевидно не виконується, бо усі  - парні.

11 клас

**Рис. 7**

**1.** Задача 10–1**.**

**2.** Для яких натуральних  квадрат  можна покрити -тетраміно (рис. 7) можливо у декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка  покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі. Жодна фігурка не повинна виходити за межі дошки.

**Рис. 8**

***Відповідь:*** для усіх парних .

***Розв’язання*.** При  розглянемо шахове розфарбування дошки. Припустимо, що існує шукане покриття квадрату у  шари. Чорні клітини ототожнимо з «», а білі з – «». Без обмеження загальності вважаємо, що кутові поля – чорні, тобто їх на 1 більше, тому сума усіх чорних  та білих  полів дорівнює . Позначимо значення комірки – сумарну кількість її покриттів. Тоді сумарне значення по усіх комірках складає , але з іншого боку у кожному тетраміно покриття сума значень дорівнює нулеві. А тому і сума усього покриття повинна дорівнювати нулеві.

При  це можливе. Неважко покрити прямокутник  за допомогою двох таких тетраміно в один шар. А тому таке покриття можливе у будь-яку кількість шарів. Далі просто при  легко розбити квадрат на квадрати , звідки розв’язання стає очевидним. При  квадрат  можна розбити на декілька смуг , які очевидно можна покрити, а також квадрат . Покажемо, що квадрат  можна покрити у два шари. Покриваємо в один шар, як на рис. 9, де непокритим залишився квадрат . Аналогічно покриваємо другим шаром, щоб непокритий був сусідній з першим квадрат  (все робиться симетрично відносно вертикальної середньої прямої). Після цього все покрите у два шари, окрім цих двох квадратиків, що покриті в один шар. Залишається їх покрити двома фігурками тетраміно і покриття у два шари побудоване.

**3.** На площині дано два кола  та  з центрами  та  відповідно дотикаються зовнішнім чином у точці , при цьому радіус кола  більший за радіус кола . Розглянемо точку  таку, що точки ,  та  не колінеарні.  та  – дотичні до кола  ( та  є точками дотику). Лінії  і  перетинають вдруге коло  у точках  і  відповідно. Точка перетину  і дотичної в точці  до кола  позначимо через . Доведіть, що точка  лежить на фіксованій прямій, коли точка  рухається по колу  таким чином, що точки ,  та  не колінеарні.

**Рис. 9**

























***Розв’язання*.** Друга точка перетину лінії  і кола  позначимо через  (рис. 10). Тоді ми отримуємо гармонійний чотирикутник . Крім того , тому  також гармонійний. Тому точка  належить спільній дотичній до двох кіл, що проходить через точку .

**4.** Задача 10–4**.**