

Вівторок, 23 липня, 2013

Задача 1. Доведіть, що для будь-якої пари натуральних чисел k та n існують k (не обов'язково різних) натуральних чисел m_1, m_2, \dots, m_k таких, що виконується рівність

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

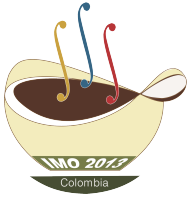
Задача 2. Колумбійською конфігурацією будемо називати такий набір з 4027 точок на площині, жодні три з яких не лежать на одній прямій, при цьому 2013 з них пофарбовано в червоний колір, а решта 2014 – у блакитний. Розглянемо набір прямих, що розділяють площину на декілька областей. Назвемр цей набір *гарним* для даної колумбійської конфігурації точок, якщо виконуються такі умови:

- жодна пряма не проходить через жодну точку конфігурації;
- жодна область розбиття не містить точок обох кольорів.

Знайдіть найменше можливе значення k таке, що для довільної колумбійської конфігурації з 4027 точок існує гарний набір з k прямих.

Задача 3. Нехай зовнівписане коло трикутника ABC , що лежить навпроти вершини A , дотикається до сторони BC у точці A_1 . Точки B_1 на стороні CA і C_1 на стороні AB визначаються аналогічним чином з використанням зовнівписаних кіл, що лежать навпроти вершин B і C , відповідно. Відомо, що центр описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$ лежить на колі, описаному навколо трикутника ABC . Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Зовнівписаним колом трикутника ABC , що лежить навпроти вершини A , називається коло, яке дотикається до відрізка BC , продовження сторони AB за точку B і продовження сторони AC за точку C . Зовнівписані кола, що лежать навпроти вершин B і C , визначаються аналогічним чином.



Середа, 24 липня, 2013

Задача 4. Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC . Нехай W — довільна точка на відрізку BC , що відмінна від B і C . Позначимо через M і N основи висот трикутника ABC , що проведені з вершин B і C , відповідно. Нехай ω_1 — описане коло трикутника BWN , а X — така точка на ω_1 , що WX — діаметр ω_1 . Аналогічно, нехай ω_2 — описане коло трикутника CWM , і Y — така точка на ω_2 , що WY — діаметр ω_2 . Доведіть, що точки X , Y і H лежать на одній прямій.

Задача 5. Позначимо через $\mathbb{Q}_{>0}$ множину всіх додатніх раціональних чисел. Нехай $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ — функція, що задовольняє такі умови:

- (i) для всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ виконується нерівність $f(x)f(y) \geq f(xy)$;
- (ii) для всіх $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$ виконується нерівність $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;
- (iii) існує раціональне число $a > 1$ таке, що $f(a) = a$.

Доведіть, що $f(x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. Нехай $n \geq 3$ — ціле число. Розглянемо коло і $n + 1$ точку на ньому, що ділять його на рівні дуги. Розглянемо всі способи позначити ці точки числами $0, 1, \dots, n$ так, що кожне число використовується рівно один раз. Два способи, що відрізняються поворотом, вважаються однаковими. Спосіб позначення назвемо *чудовим*, якщо для довільних чотирьох міток $a < b < c < d$ таких, що $a + d = b + c$, хорда, що з'єднує вершини з мітками a і d , не перетинає хорду, що з'єднує точки з мітками b і c .

Нехай M — кількість чудових способів позначення. Нехай N — кількість упорядкованих пар (x, y) натуральних чисел, що задовольняють умови $x + y \leq n$ і $\text{НСД}(x, y) = 1$. Доведіть, що

$$M = N + 1.$$