

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта  
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике  
2013/2014 учебного года

***Задания для 11 класса***

1. Доказать, что если  $\alpha$  – острый угол, то  $\left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) > 5$ .
2. Докажите, что из любых 7 последовательных натуральных чисел можно выбрать 6 и разбить их на две группы по 3 числа так, чтобы сумма квадратов чисел обеих групп была одинаковой.
3. В каждой клетке квадратной таблицы  $n \times n$  ( $n$  – натуральное число, не меньшее двух) записано произвольное целое число. Известно, что сумма всех чисел в любом квадрате  $2 \times 2$  положительна, а сумма всех чисел таблицы отрицательна. Найдите все возможные значения  $n$ .
4. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ . Точки  $X$  и  $Y$  – середины отрезков  $CA_1$  и  $AC_1$ . Известно, что  $XY = BB_1$ . Докажите, что существуют две стороны треугольника  $ABC$ , отношение длин которых равно  $\sqrt{2}$ .

*На выполнение заданий олимпиады отводится 4 часа*

*Верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов*

*Использование калькуляторов и любой другой электронной техники категорически запрещается*

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта  
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике  
2013/2014 учебного года

**Задания для 10 класса**

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} |xy| + 1 = |x| + |y|, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

2. Рассмотрим натуральные числа вида  $n = (p^2 - 1)(p^2 - 4) + 8$ , где  $p$  – простое число. Какое наименьшее возможное значение суммы цифр числа  $n$ ?

3. Докажите, что произвольный выпуклый 2014-угольник можно разрезать не более чем на 8048 равнобедренных треугольников?

4. В окружности с диаметром  $AB$  провели хорду  $PQ$  с серединой в точке  $R$ . Из точек  $P$  и  $Q$  опустили перпендикуляры  $PS$  и  $QT$  на диаметр  $AB$ . Оказалось, что  $AB^2 = 2PQ^2$ .

а) Найдите величину угла  $RST$ .

б) Прямые  $RS$  и  $RT$  продолжены до пересечения с окружностью в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $PE + QF \geq EF$ .

*На выполнение заданий олимпиады отводится 4 часа*

*Верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов*

*Использование калькуляторов и любой другой электронной техники категорически запрещается*

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта  
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике  
2013/2014 учебного года

*Задания для 9 класса*

1. В ящике лежат булки трёх типов: с маком, с изюмом и с вареньем. Известно, что среди любых выбранных 2014 булок из этого ящика обязательно встретится булка с маком, булка с изюмом и булка с вареньем. Какое наибольшее число булок могло быть в корзине?

2. Для любых положительных чисел  $a, b, c$  докажите неравенство:

$$2(a^3 + b^3 + c^3 + abc) \geq (a+b)(b+c)(c+a).$$

3. В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  равны. Пусть  $P$  – точка пересечения диагоналей  $AD$  и  $CF$ ,  $R$  – точка пересечения диагоналей  $BE$  и  $CF$ ,  $Q$  – точка пересечения диагоналей  $AD$  и  $BE$ . Известно, что  $AP=PF$ ,  $BR=CR$  и  $DQ=EQ$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  и  $F$  лежат на одной окружности.

4. Может ли сумма цифр квадрата некоторого натурального числа равняться  
а) 2012; б) 2013; в) 2014? Ответ обоснуйте.

*На выполнение заданий олимпиады отводится 4 часа*

*Верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов*

*Использование калькуляторов и любой другой электронной техники категорически запрещается*

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта  
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике  
2013/2014 учебного года

*Задания для 8 класса*

1. Любые две соседние цифры натурального числа  $A$  образуют число, которое делится на 23. Какое наибольшее количество цифр может иметь число  $A$ ?
2. Известно, что для некоторых простых чисел  $pq + pr = 80$  и  $pq + qr = 425$ . Найдите сумму  $p + q + r$ .
3. В круге выбрали 8 точек (точки граничной окружности считаются принадлежащими кругу). Доказать, что среди выбранных 8 точек найдутся 2 такие, что расстояние между ними меньше радиуса круга.
4. Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – числа, сумма которых равна 0 и верны равенства
$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{k-1} - 2a_k| = |a_k - 2a_1|.$$
Обязательно ли все числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  равны 0, если:  
а)  $k = 4$ ; б)  $k = 3$ ; в)  $k = 43$ ? Ответ обоснуйте.

*На выполнение заданий олимпиады отводится 4 часа*

*Верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов*

*Использование калькуляторов и любой другой электронной техники категорически запрещается*

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту  
Автономної Республіки Крим  
III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики  
2013/2014 навчального року

*Завдання для 8 класу*

1. Довільні дві сусідні цифри натурального числа  $A$  утворюють число, яке ділиться на 23. Яку найбільшу кількість цифр може мати число  $A$ ?
2. Відомо, що для деяких простих чисел  $pq + pr = 80$  та  $pq + qr = 425$ . Знайдіть суму  $p + q + r$ .
3. У крузі обрано 8 точок (точки граничного кола вважаються такими, що належать колу). Доведіть, що серед обраних 8 точок знайдуться 2 такі, що відстань між ними менше радіуса цього кола.
4. Нехай  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – числа, сума яких дорівнює 0 та вірні рівності
- $$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \dots = |a_{k-1} - 2a_k| = |a_k - 2a_1|.$$
- Чи обов'язково усі числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  дорівнюють 0, якщо:
- а)  $k = 4$ ; б)  $k = 3$ ; в)  $k = 43$ ? Відповідь обґрунтуйте.

*На виконання завдань олімпіади відводиться 4 години*

*Правильне розв'язання кожної задачі оцінюється у 7 балів*

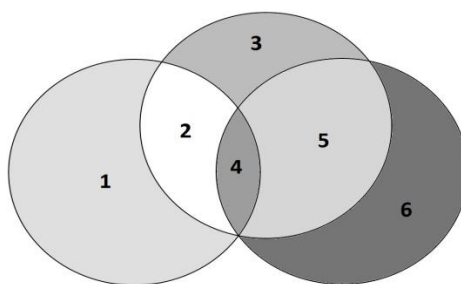
*Використання калькуляторів та будь-якої іншої електронної техніки категорично забороняється*

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта  
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике  
2013/2014 учебного года

**Задания для 7 класса**

1. Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат – 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?
2. Оля задумала натуральное число. Остаток задуманного числа при делении на 9 равен неполному частному. Кроме того, остаток задуманного числа на 14 тоже равен неполному частному. Какое число задумала Оля? Найдите все возможные случаи.
3. Можно ли расставить в таблице **5x5** различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних чисел была равна 4 или 7? Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее.
4. Три одинаковых круга расположены так, как показано на рисунке, причем площадь каждой из 6 частей равна целому числу. Докажите, что если из суммы площадей первой, третьей и шестой части отнять площади второй и пятой частей, то получится число, делящееся на 3.



*На выполнение заданий олимпиады отводится 3 часа*

*Верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов*

*Использование калькуляторов и любой другой электронной техники категорически запрещается*