Министерство образования и науки, молодёжи и спорта
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике
2013/2014 учебного года

Указания и ответы к решению заданий для 11 класса

1. ***Доказать, что если*** α ***– острый угол, то*** $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5$**.**

<u>Решение.</u> Левую часть доказываемого тригонометрического неравенства можно представить в виде

$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha},$$

так как $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Если α – острый угол, то все знаменатели положительны. Поскольку синус и косинус любого угла не могут быть больше 1, второе и третье слагаемые не меньше 1, а последнее слагаемое не меньше 2. Следовательно, вся сумма не меньше 5. Но она не может быть равна 5, поскольку два средних члена не могут быть одновременно равны 1 (равенства $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=1$ выполняются для различных углов). Следовательно, $1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}>5$.

2. ***Докажите, что из любых 7 последовательных натуральных чисел можно выбрать 6 и разбить их на две группы по 3 числа так, чтобы сумма квадратов чисел обеих групп была одинаковой.***

<u>Доказательство.</u> Пусть задана некоторая семёрка последовательных натуральных чисел, а n — среднее из них. Несложно проверить такое равенство:

$$(n-3)^2+(n+1)^2+(n+2)^2=(n+3)^2+(n-1)^2+(n-2)^2.$$

Последнее равенство и даёт искомое разбиение чисел на группы (при этом из набора выбрасывается среднее число n).

Замечание. Основная трудность задачи – правильно организовать разбиение 7 последовательных целых чисел на тройки. Для того, чтобы догадаться до него, можно к примеру рассмотреть некоторый набор 7 последовательных целых чисел (например: - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4) и перебором найти нужные 6 чисел и их разбиение на 2 группы: $(-2)^2+2^2+3^2=(-1)^2+0^2+4^2$.

3. ***В каждой клетке квадратной таблицы $n\times n$ (n – натуральное число, не меньшее двух) записано произвольное целое число. Известно, что сумма всех чисел в любом квадрате 2x2 положительна, а сумма всех чисел таблицы отрицательна. Найдите все возможные значения n.***

Решение. 1) Если $n \vdots 2$, то квадрат $n\times n$ разбивается на несколько квадратов вида 2×2 и поэтому если в каждом из них сумма чисел положительна, то и сумма всех чисел квадрата $n\times n$ также положительна.

2) Пусть теперь n нечетно, $n\geq 3$. Докажем, что можно расставить целые числа так, чтобы выполнялось условие задачи. $n=2k+1, k\geq 1-$ натуральное число.

Расставим 2 целых числа a и b в квадрате $n\times n$ так, как показано на рисунке слева.

a	b	a	…	a	b	a
a	b	a	…	a	b	a
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
a	b	a	…	a	b	a

При такой расстановке в любом квадрате 2×2 сумма чисел $2(a+b)>0$, а сумма чисел в квадрате $n\times n$ $n\big((k+1)a+kb\big)<0$.

Покажем, что при любом натуральном k существуют $a,b\in\mathbb{Z}$ такие, что

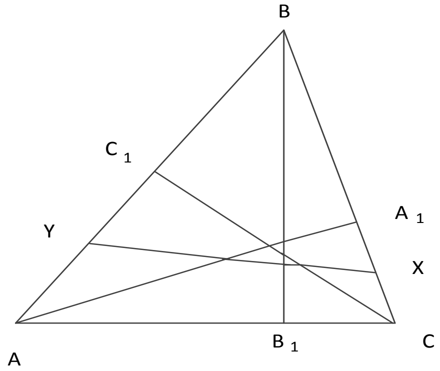
$\begin{cases} a+b>0 \\ (k+1)a+kb<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -1<\frac{a}{b}<-\frac{k}{k+1}, \\ a<0,\ b<0. \end{cases}$

Последним системам неравенств удовлетворяют числа $a=-(k+1)$ и $b=k+2$.

Действительно, $a+b=1>0$ и $(k+1)a+kb=-(k+1)^2+k(k+2)=-1<0$.

Ответ: n – любое нечётное число, большее либо равное 3.

4. ***В остроугольном треугольнике*** ABC ***проведены высоты*** AA_1**,** BB_1 ***и*** CC_1**.** ***Точки*** X ***и*** Y ***– середины отрезков*** CA_1 ***и*** AC_1**.** ***Известно, что*** $XY = BB_1$**.** ***Докажите, что существуют две стороны треугольника*** ABC, ***отношение длин которых равно*** $\sqrt{2}$ **.**



<u>Решение.</u> Пусть M – середина стороны AC. Поскольку $\angle MXB = \angle MYB = 90^\circ$ ($MX \parallel AA_1$, $MY \parallel CC_1$ как средние линии ΔACC_1 и ΔAA_1C), то четырехугольник $MXBY$ – вписанный и отрезок BM – диаметр его описанной окружности. Тогда по теореме синусов для треугольника XBY $\dfrac{XY}{\sin\angle XBY} = BM$, то есть $\dfrac{XY}{BM} = \sin\angle XBY$. По условию задачи $XY = BB_1$ и поэтому $\dfrac{BB_1}{BM} = \sin\angle XBY$. С другой стороны, BB_1 и BM – катет и гипотенуза в прямоугольном треугольнике BB_1M, поэтому $\dfrac{BB_1}{BM} = \sin\angle BMC = \sin\angle BMA$. Таким образом,

$$\sin\angle ABC = \sin\angle XBY = \sin\angle BMA.$$

Следовательно, $\angle ABC = \angle BMA$ или $\angle ABC = 180^\circ - \angle BMA = \angle BMC$.

В первом случае треугольники ABC и AMB подобны по двум углам. Поэтому

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2AB}{AC},$$

Откуда $AC^2 = 2AB^2$ и, стало быть, $AC = AB\sqrt{2}$. Если же $\angle ABC = \angle BMC$, аналогичными рассуждениями получаем, что $AC = BC\sqrt{2}$.

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике
2013/2014 учебного года

Указания и ответы к решению заданий для 10 класса

1. ***Решите систему уравнений:***

$$\begin{cases} |xy|+1=|x|+|y|, \\ x-y=2. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы следующим образом:

$$|xy|-|x|-|y|+1=(|x|-1)\cdot(|y|-1)=0.$$

Отсюда либо x = ± 1, либо y = ± 1. Перебором из второго уравнения получаем все пары решений: (3, 1); (1, -1); (-1, -3).

Ответ: (3, 1); (1, -1); (-1, -3).

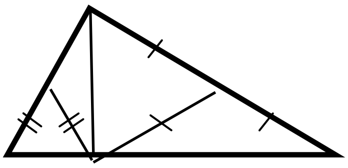
2. ***Рассмотрим натуральные числа вида n = (p^2 – 1)(p^2 – 4) + 8, где p – простое число. Какое наименьшее возможное значение суммы цифр числа n?***

Решение. Пусть $n=(p^2-1)(p^2-4)+8$, где p – простое число. Имеем: $n=(p-2)(p-1)(p+1)(p+2)+8$. Если $p\neq 5$, то p не делится на 5, т.к. p – простое число и одно из чисел $p-2, p-1, p+1$ и $p+2$ делится на 5. Поэтому $(p^2-1)(p^2-4) \vdots 10$ и число n заканчивается на 8. Сумма цифр такого числа не меньше 8. При $p=5$ $n=512$ и сумма цифр числа n равна 8. Итак, наименьшее возможное значение суммы цифры числа n равно 8 .

Ответ: 8.

3. ***Докажите, что произвольный выпуклый 2014-угольник можно разрезать не более чем на 8048 равнобедренных треугольников?***

<u>Решение.</u> 1) Если провести высоту из вершины большего угла, то любой треугольник можно разрезать на 4 равнобедренных треугольника следующим образом:



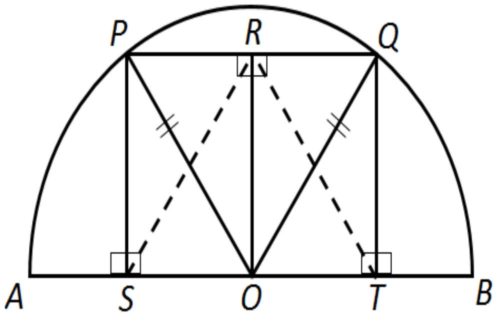
2) Далее, любой выпуклый 2014-угольник можно разрезать на 2012 треугольников, если провести из любой вершины все диагонали. В итоге, любой выпуклый 2014-угольник можно разрезать на 8048 равнобедренных треугольников.

4. ***В окружности с диаметром AB провели хорду PQ с серединой в точке R. Из точек P и Q опустили перпендикуляры PS и QT на диаметр AB. Оказалось, что $AB^2 = 2PQ^2$.***

а) Найдите величину угла RST.

б) Прямые RS и RT продолжены до пересечения с окружностью в точках E и F. Докажите, что PE + QF ≥ EF.

<u>Решение.</u> **а)** Пусть O – центр окружности. Тогда $OR \perp PQ$, т.к. R – середина PQ. $\angle PSO + \angle PRO = 180°$ и поэтому через точки P, S, O и R можно провести окружность, откуда $\angle RST = \angle OPQ$. Аналогично, $\angle PQO = \angle RST$.

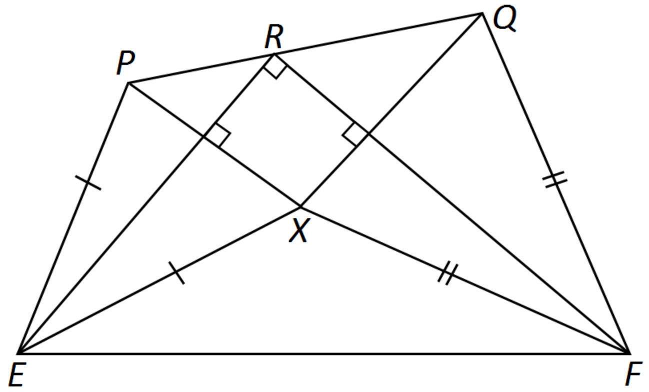


Далее, $\Delta\, POQ$ – равнобедренный, т.к. $OP = OQ = R$ – радиус окружности. При этом $PQ^2 = \frac{AB^2}{2} = \frac{(2R)^2}{2} = 2R^2$, т.е. $PQ^2 = PO^2 + OQ^2$, т.е. $\angle POQ = 90°$ и $\angle OPQ = \angle PQO = 45°$ и $\angle RST = \angle OPQ = 45°$.

б) Докажем, что теперь $EF \leq PE + QF$. Проведём лучи PX и QX, которые параллельны соответственно прямым RE и RF (они пересекаются в точке X). Треугольник PXQ – прямоугольный. Тогда RE – серединный перпендикуляр к PX, а RF – серединный перпендикуляр к QX, поскольку R – середина PQ. Поэтому PE = EX и QF = FX, откуда

$$PE + QF = EX + FX \geq EF$$

по неравенству треугольника для точек E, X и F.



Министерство образования и науки, молодёжи и спорта
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике
2013/2014 учебного года

Указания и ответы к решению заданий для 9 класса

1. ***В ящике лежат булки трёх типов: с маком, с изюмом и с вареньем. Известно, что среди любых выбранных 2014 булок из этого ящика обязательно встретится булка с маком, булка с изюмом и булка с вареньем. Какое наибольшее число булок могло быть в ящике?***

Решение. Пусть в ящике лежит a булок с маком, b булок с изюмом, c булок с вареньем. По условию:

$$\begin{cases} a+b+1 \le 2014 \\ a+c+1 \le 2014 \\ b+c+1 \le 2014 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a+b \le 2013 \\ a+c \le 2013 \\ b+c \le 2013 \end{cases}$$

Поэтому общее число булок $a+b+c \le \frac{3\cdot 2013}{2}$ и наибольшее возможное число булок в корзине равно $\frac{3\cdot 2013-1}{2} = \frac{6038}{2} = 3019$. Это возможно, например, при $a = b = 1006$, $c = 1007$.

Ответ: 3019 булок.

2. ***Для любых положительных чисел*** a, b, c ***докажите неравенство:***

$$2(a^3+b^3+c^3+abc) \ge (a+b)(b+c)(c+a).$$

Доказательство. После раскрытия скобок и приведения подобных членов получим такое равносильное неравенство:

$$2a^3+2b^3+2c^3 \ge c^2(a+b)+a^2(b+c)+b^2(c+a).$$

Это же неравенство можно записать иначе:

$$2a^3+2b^3+2c^3 \ge ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Докажем вспомогательное неравенство для положительных чисел x и y:

$$x^3+y^3 \ge xy(x+y).$$

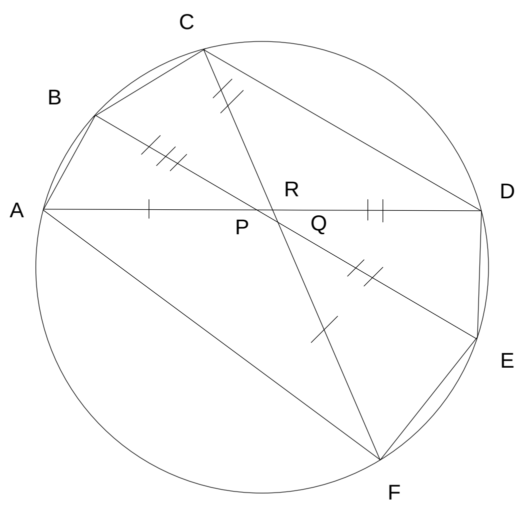
Для этого выполним несколько преобразований, начав с очевидного неравенства $(x-y)^2 \ge 0$: $x^2-2xy+y^2 \ge 0 \Rightarrow x^2-xy+y^2 \ge xy \Rightarrow$ $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) \ge xy(x+y)$.

Теперь можно утверждать, что $a^3+b^3 \ge ab(a+b)$, $b^3+c^3 \ge bc(b+c)$ і $c^3+a^3 \ge ca(c+a)$. Остаётся лишь сложить эти три неравенства.

Замечание. Отметим, что неравенство $xy(x+y)=x^2y+xy^2 \le x^3+y^3$ для положительных чисел x и y можно доказать с помощью неравенства Коши для n = 3:

$$x^2y \le \frac{x^3+x^3+y^3}{3} \text{ и } xy^2 \le \frac{x^3+y^3+y^3}{3}.$$

3. ***В выпуклом шестиугольнике*** $ABCDEF$ ***диагонали*** AD, BE ***и*** CF ***равны. Пусть*** P ***– точка пересечения диагоналей*** AD ***и*** CF, R ***– точка пересечения диагоналей*** BE ***и*** CF, Q ***– точка пересечения диагоналей*** AD ***и*** BE***. Известно, что*** $AP=PF$, $BR=CR$ ***и*** $DQ=EQ$***. Докажите, что точки*** A, B, C, D, E ***и*** F ***лежат на одной окружности.***



Решение. Пусть точки P, Q и R не совпадают и O – центр окружности, вписанной в треугольник PQR. Покажем, что точки A, B, C, D, E и F лежат на окружности с центром в точке O. Поскольку треугольник APF равнобедренный, серединный перпендикуляр к отрезку AF является биссектрисой угла $\angle APF$, а значит и угла $\angle QPR$. Поэтому он проходит через точку O. Таким образом, $OA = OF$. Аналогично, $OB = OC$ и $OD = OE$. Кроме того, $\angle OAR = \angle PAF - \angle OAF = \angle PFA - \angle OFA = \angle OFP$. Поэтому треугольники AOD и FOC равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = OF$, $AD = FC$ и $\angle OAD = \angle OFC$). Значит, $OD = OC$. Аналогично устанавливаем, что $OA = OB$. Поэтому $OF = OA = OB = OC = OD = OE$ и O – центр окружности, описанной около шестиугольника ABCDEF.

Если же совпадают, например, точки P и Q, то это значит, что все три диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке P = Q = R. Из условия задачи (равенства диагоналей и некоторых пар отрезков) вытекает, что эта точка равноудалена от всех вершин шестиугольника ABCDEF.

Идея альтернативного решения. Достаточно показать, что серединные перпендикуляры ко всем сторонам шестиугольника пересекаются в одной точке. Если точки P, Q и R различны, то из равенства отрезков в условии можно вывести (это стоит подробно расписать), что серединные перпендикуляры к сторонам шестиугольника есть биссектрисы внутренних углов треугольника PQR. Случай P = Q = R рассматривается аналогично.

4. ***Может ли сумма цифр квадрата некоторого натурального числа равняться а) 2012; б) 2013; в) 2014? Ответ обоснуйте.***

Решение. Вспомним, что сумма цифр натурального числа даёт тот же остаток от деления на 3 и 9, что и само число.

а) Сумма цифр точного квадрата не может быть рана 2012, так как 2012 даёт остаток 2 при делении на 3. А перебором остатков от деления на 3 можно доказать, что точный квадрат не может давать остаток 2 при делении на 3.

б) Сумма цифр точного квадрата не может быть рана 2013, так как 2013 делится на 3, но не делится на 9.

в) Пусть $n = \underbrace{99\dots9}_{223}5 = 1\underbrace{00\dots0}_{224} - 5$. Тогда: $n^2 = 1\underbrace{00\dots0}_{448} - 2\cdot 5\cdot 1\underbrace{00\dots0}_{224} + 25 =$

$= \underbrace{99\dots9}_{223}000\dots025$. Сумма цифр этого число равна 2014.

Ответ: а) и б) не может, в) может.

Рекомендуемая система оценки задачи 4: а) 2 балла; б) 1 балл; в) 4 балла.

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике
2013/2014 учебного года

Указания и ответы к решению заданий для 8 класса

1. Любые две соседние цифры натурального числа А образуют число, которое делится на 23. Какое наибольшее количество цифр может иметь число А?

Решение. Первая цифра числа, удовлетворяющего условию задачи, не может быть равна 1, 3, 5, 7, 8. Если это число начинается с цифры 2, то вторая его цифра равна 3 и дальше «продолжать» это число нельзя. Если оно начинается с 4, то продолжается единственным образом – 46923; если же его первая цифра 6 или 9, то оно равно 6923 или 923. Итак, данное число может иметь не более 5 цифр. Мы попутно нашли все числа, удовлетворяющие условию задачи.

2.Известно, что для некоторых простых чисел $pq+pr=80$ ***и*** $pq+qr=425$***. Найдите сумму*** $p+q+r$***.***

Решение. p, q и r – простые числа и $pq+pr=80, pq+qr=425$. Поскольку $p(q+r)=80$, то $80 \vdots p$, т.е. либо $p=2$, либо $p=5$. Далее, $q(p+r)=425$ и $425 \vdots q$, т.е. $q=5$ или $q=17$.

Пусть $p=2$. Тогда $q+r=40$. Если $q=5$, то $r=35$ – составное число, что невозможно. Если же $q=17$, то $r=23$. Тройка чисел $p=2$, $q=17$ и $r=23$ подходит.

Пусть теперь $p=5$ и $q+r=16 \Rightarrow q \neq 17$. Поэтому возможно только $q=5$ и $r=11$. Но эта тройка $p=q=5, r=11$ не удовлетворяет уравнению $pq+qr=425$.

Итак, $p=2, q=17$ и $r=23$, а $p+q+r=42$.

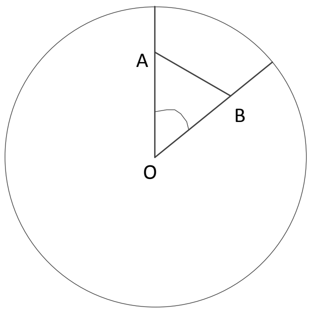
Ответ: 42.

3. ***В круге выбрали 8 точек (точки граничной окружности считаются принадлежащими кругу). Доказать, что среди выбранных 8 точек найдутся 2 такие, что расстояние между ними меньше радиуса круга.***

Доказательство. Если хотя бы 2 точки совпадают, то расстояние между ними равно 0 и утверждение задачи верно.

Пусть теперь все 8 точек различны. Тогда из 8 выбранных точек по крайней мере 7 не совпадают с центром круга. Каждая из этих 7 точек определяет радиус круга. Если не все радиусы различны, то какие-то две точки, не совпадающие с центром круга, лежат на одном и том же радиусе. Поэтому расстояние между ними меньше радиуса круга.

Предположим, что все 7 точек, не совпадающих с центром круга, лежат на 7 различных радиусах. Эти радиусы образуют по крайней мере 7 центральных углов, поэтому среди них заведомо найдутся два таких радиуса, что заключенный между ними угол меньше $\frac{1}{6}$ полного угла, то есть меньше 60°. Обозначим A и B те две из 8 заданных точек, которые определяют радиусы, служащие сторонами угла меньше 60°.



Поскольку $\angle AOB < 60^\circ$, то в треугольнике AOB есть больший угол. Но во всяком треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Следовательно, в треугольнике AOB есть сторона, которая больше стороны AB. Таким образом, сторона AB меньше какой-то из сторон AO, OB, а поскольку длина наибольшей из них не превышает радиуса круга, то AB меньше радиуса круга.

Итак, среди 8 выбранных точек всегда найдутся две такие, что расстояние между ними меньше радиуса круга.

4. Пусть a_1***,*** a_2***, …,*** a_k ***– числа, сумма которых равна 0 и верны равенства***

$$|a_1 - 2a_2| = |a_2 - 2a_3| = \ldots = |a_{k-1} - 2a_k| = |a_k - 2a_1|.$$

Обязательно ли все числа a_1***,*** a_2***, …,*** a_k ***равны 0, если:***

а) k = 4; б) k = 3; в) k = 43? Ответ обоснуйте.

__**Решение.**__ ***а).*** При k =4 можно решить систему уравнений

$a_1 - 2a_2 = a_3 - 2a_4 = 1$; $a_2 - 2a_3 = a_4 - 2a_1 = -1$. Нетрудно видеть, что набор чисел $a_1 = a_3 = 1/3$; $a_2 = a_4 = -1/3$ удовлетворяет этой системе.

б) и в). Данные рассуждения годятся для любого нечётного числа k.

Пусть $|a_1 - 2a_2| = x$. Тогда

$$a_1 - 2a_2 = \pm x,\ \ a_2 - 2a_3 = \pm x,\ \ldots,\ \ a_{k-1} - 2a_k = \pm x,\ \ a_k - 2a_1 = \pm x.$$

Сложим эти равенства. Слева получим сумму $-(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) =$ 0 по условию. Справа получим величину

$$(\pm 1 \pm 1 \pm 1 \ldots \pm 1)x = px,$$

где p – нечётное число, поскольку оно равно сумме нечётного числа нечетных чисел. Следовательно, $p \neq 0$ и поэтому $x = 0$. Таким образом,

$$a_1 - 2a_2 = a_2 - 2a_3 = \ldots = a_{k-1} - 2a_k = a_k - 2a_1 = 0.$$

Если $a_1 = 0$, то, очевидно, остальные числа также равны нулю. Если $a_1 > 0$, то остальные числа также будут больше нуля и их сумма не будет равна нулю. Аналогично, она не может равняться нулю, если $a_1 < 0$.

__**Ответ:**__ **а) существуют; б)** и **в) не существуют.**

__**Замечание.**__ Задачу пункта б) можно решить раскрытием модулей.

__**Рекомендуемая система оценки задачи 4:**__ а) 2 балла; б) 1 балл; в) 4 балла.

Министерство образования и науки, молодёжи и спорта
Автономной Республики Крым

III этап Всеукраинской ученической олимпиады по математике
2013/2014 учебного года

Указания и ответы к решению заданий для 7 класса

1. ***Я иду от дома до школы 30 минут, а мой брат – 40 минут. Через сколько минут я догоню брата, если он вышел из дома на 5 минут раньше меня?***

Решение. За 5 минут брат пройдет $\frac{1}{8}$ пути. За каждую минуту я прохожу $\frac{1}{30}$ пути, а брат – $\frac{1}{40}$, т.е. за минуту я наверстываю $\frac{1}{30}-\frac{1}{40}=\frac{1}{120}$ части пути. А $\frac{1}{8}$ пути я наверстаю соответственно за $\frac{1}{8}:\frac{1}{120}=15$ минут, т.е. ровно на полпути от школы.

2. ***Оля задумала натуральное число. Остаток задуманного числа при делении на 9 равен неполному частному. Кроме того, остаток от деления задуманного числа на 14 тоже равен неполному частному. Какое число задумала Оля? Найдите все возможные случаи.***

Решение. Обозначим через х частное при делении задуманного числа на 9. Тогда число имеет вид $9x+x$ и следовательно, делится на 10. Аналогично задуманное число делится на 30. При этом частное при делении на 9 (оно же остаток) не превосходит 8, т.е. задуманное число меньше, чем $9\cdot 8+8=80$. Значит, задуманное число равно 30 или 90.

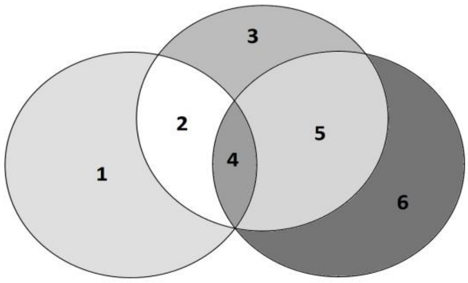
Ответ: 30 или 60.

3. ***Можно ли расставить в таблице $5x5$ различные натуральные числа так, чтобы разность любых двух соседних чисел была равна 4 или 7? Числа в таблице считаются соседними, если они стоят рядом в одной строке или в одном столбце. При вычислении разности из большего числа вычитается меньшее.***

Решение. Можно. Для этого достаточно потребовать, чтобы все разности по горизонтали были равны 4, а разности по вертикали – 7.

1	5	9	13	17
8	12	16	20	24
15	19	23	27	31
22	26	30	34	38
29	33	37	41	45

4. ***Три одинаковых круга расположены так, как показано на рисунке, причем площадь каждой из 6 частей равна целому числу. Докажите, что если из суммы площадей первой, третьей и шестой части отнять площади второй и пятой частей, то получится число, делящееся на 3.***



Решение. Сумма площадей трех данных кругов по условию делится на 3 и геометрически состоит из одной части 1, двух частей 2, одной части 3, трех частей 4, двух частей 5 и одной части 6. Если отнять от этого три части 2, три части 4 и три части 5, то результат по-прежнему будет делиться на 3 и как раз окажется равен требуемой разности площадей.