

## Тригонометричні підстановки

1. Розв'язати рівняння в  $\mathbb{R}$ :  $\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$ .

2. Є чотири числа з інтервалу  $(0, 1)$ . Доведіть, що серед них знайдуться два числа, скажімо  $x$  і  $y$ , таких, що

$$0 < x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} < \frac{1}{2}.$$

3. Розв'язати рівняння в  $\mathbb{R}$ :  $x^2 + (4x^3 - 3x)^2 = 1$ .

4. (Усно!) Обчислити інтеграл:

$$\int \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + x}}} dx,$$

якщо в підінтегральному виразі  $n$  коренів.

5. Для чисел  $a, b, c \in [0, 1]$  довести нерівність

$$\sqrt{abc} + \sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq 1.$$

6. Розв'язати систему в  $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x. \end{cases}$$

7. Для  $x, y \in \mathbb{R}$  довести нерівність

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}.$$

8. Для додатних чисел  $x, y, z$  таких, що  $x + y + z = xyz$ , довести нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

9. Розв'язати рівняння в  $\mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1.$$

10. Знайти найбільше і найменше значення виразу  $\frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$ .

11. Додатні числа  $a, b, c$  такі, що  $abc = a + b + c$ . Довести тотожність

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} = 1$$