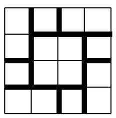
7 класс (указания для жюри)

1. Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.

Указание: Разрезать квадрат можно, например, так:



2. На складе находилось 25 белых стеклянных чашек и 35 чёрных фарфоровых. Каждая стеклянная чашка при падении разбивается на 7 осколков, а каждая фарфоровая – на 8 осколков. Сторож перекрасил несколько стеклянных чашек в чёрный цвет, а несколько фарфоровых – в белый, после чего случайно разбил все чашки. Могло ли образоваться одинаковое количество белых и чёрных осколков? Ответ обоснуйте.

Ответ: Не могло.

Указание: Предположим, что черных и белых осколков образовалось равное количество. Обозначим a – количество стеклянных чашек, которые сторож перекрасил в черный цвет, а b – количество фарфоровых чашек, которые сторож перекрасил в белый цвет. Тогда четных осколков всего $7a+8(35-b)$, а белых $7(25-a)+8b$. Должно быть выполнено равенство $7a+8(35-b) = 7(25-a)+8b$, т. е. $8(35-2b) = 7(25-2a)$. Видно, что левая часть последнего равенства – четная, а правая – нечетная, следовательно такое равенство невозможно.

3. Серёжа покрасил все целые числа в несколько цветов так, что числа, разность которых является простым числом, покрашены в разные цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано? Ответ обоснуйте.

Ответ: 4 цвета.

Указание: Покажем сначала, что четырех цветов Сереже хватит. Действительно, покрасим в первый цвет числа вида $4k+1$, во второй цвет – вида $4k+2$, в третий – $4k+3$, в четвертый – $4k$ (всюду k – целое число). Тогда разность между одноцветными числами всегда делится на 4, а, значит, не может оказаться простой.
Покажем теперь, что меньшего числа цветов не хватит. Рассмотрим числа 1, 3, 6, 8. Несложно проверить, что разность любых двух из этих чисел является простым числом. Это означает, что никакие два из этих четырех чисел не могут быть одного цвета, следовательно цветов должно быть хотя бы 4.

4. В клубе 30 джентльменов. У каждого джентльмена есть шляпа. Однажды каждый джентльмен отправил свою шляпу какому-то другому джентльмену (джентльмен мог получить более одной шляпы). Докажите, что можно выбрать 10 джентльменов так, чтобы ни один из них не отправлял другому шляпу.

Указание: Рассмотрим некоторого джентльмена D_1. Пусто он отправил шляпу джентльмену D_2, джентльмен D_2 отправил шляпу джентльмену D_3 и т. д. Поскольку джентльменов конечное число, то для некоторых n и k $(n \geq k)$ джентльмены D_k и D_{n+1} совпадут (другими словам джентльмен D_n отправил шляпу джентльмену D_k). Назовем джентльменов D_1, D_2, ..., D_n – цепочкой. Покрасим джентльменов в три цвета: D_1, D_3, D_5, ... в первый цвет, D_2, D_4, D_6, ... во второй цвет. Теперь посмотрим, на цвета джентльменов D_n и D_k. Если они оказались одного цвета, то перекрасим джентльмена D_n в третий цвет. Если же джентльмены D_n и D_k сразу оказались покрашены в разные цвета, то никого перекрашивать не будем.
Рассмотрим теперь какого-то еще не покрашенного джентльмена E_1. Пусть он отправил шляпу джентльмену E_2. Джентльмен E_2 отправил шляпу джентльмену E_3 и т. д. Если мы в этой цепочке не встретим ни одного уже покрашенного джентльмена, то покрасим их так же, как и цепочку D_1, D_2, ...

Если же какой-то джентльмен E_m окажется уже покрашен (пусть это первый покрашенеый джентльмен в этой цепочке), то мы попадаем в уже покрашенную ранее цепочку, следовательно замыкается она тоже в покрашенном джентльмене (т. е. ни к одному из E_1, E_2, $\ldots$, E_{m-1} мы не вернемся). Пусть джентльмен E_m покрашен в первый цвет. Покрасим тогда джентльменов E_1, E_2, $\ldots$, E_{m-1} во второй и третий цвета через один. Дальше снова выберем непокрашенного джентльмена и проделаем ту же операцию покраски. Заметим, что мы действовали так, что никакой из джентльменов не отправлял шляпу джентльмену того же цвета.
Джентльменов всего 30, покрашены они в три цвета, следовательно джентльменов одного из цветов не менее 10. Их мы и выберем.

8 класс (указания для жюри)

1. Делегация некоторой страны на Олимпийских играх будет состоять из спортсменов и чиновников. Средний возраст спортсменов на начало олимпиады составит 22 года, а чиновников – 47 лет. При этом средний возраст всех членов делегации окажется равным 41 году. Какова в этой делегации доля чиновников? Ответ обоснуйте.

Ответ: $\dfrac{19}{25} = 0,76$.

Указание: Пусть в делегации a спортсменов и b чиновников. Тогда суммарный возраст спортсменов равен $22a$, а чиновников $47b$. Отсюда получаем, что суммарный возраст всех членов делегации равен $22a + 47b$, следовательно $\dfrac{22a+47b}{a+b} = 41$. В итоге получаем, что $b = \dfrac{19}{6}a$, откуда $\dfrac{b}{a+b} = \dfrac{19}{25} = 0,76$.

2. Натуральное число называется *упрощённым*, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться упрощёнными? Ответ обоснуйте.

Ответ: Три.

Указание: Приведем пример трех последовательных чисел, каждое из которых является упрощенным: $33 = 3 \cdot 11$, $34 = 2 \cdot 17$, $35 = 5 \cdot 7$.
Покажем, что четыре последовательных натуральных числа не могут оказаться упрощенными. Действительно, одно из этих чисел обязательно делится на 4. Единственное число, делящееся на 4 и являющееся упрощенным, это число 4. Но числа 3 и 5 упрощенными не являются, следовательно 4 не может входить ни в какую упрощенную четверку.

3. На сторонах AB и AD вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно таким образом, что $AP = CD$, $AQ = BC$. Докажите, что отрезок PQ делится диагональю AC пополам.

Указание: **I способ:** Продлим отрезок AQ за точку A на его длину до точки T. Заметим, что $\angle TAB = 180^\circ - \angle BAD$, а также $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$, следовательно $\angle TAB = \angle BCD$. отсюда получаем, что треугольники TAP и BCD равны по двум сторонам и углу между ними. В частности $\angle PTA = \angle CBD$. Углы CBD и CAD равны, т. к. они опираются на одну дугу. Тогда $\angle PTA = \angle CAD$, следовательно $TP \parallel AC$. Но прямая AC проходит через середину отрезка TQ, а, значит, содержит среднюю линию треугольника TPQ. Это и означает, что диагональ AC делит отрезок PQ пополам.
II способ: Отметим на прямой AC такую точку S, что $PS \parallel AD$. Тогда $\angle APS = 180^\circ - \angle BAD$ и $\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD$ откуда $\angle APS = \angle BCD$. Кроме того $\angle PAS = \angle CDB$ и $AP = CD$. Отсюда получаем, что треугольники APS и DCB равны по стороне и двум углам. Тогда $PS = BC = AQ$. В четырехугольнике $APSQ$ стороны AQ и PS равны и параллельны, следовательно $APSQ$ – параллелограмм и его диагонали делятся точкой пересечения пополам. Отсюда следует требуемое.

4. В однокруговом турнире участвовали $2n$ команд (каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу). После окончания турнира оказалось, что каждая команда сыграла вничью столько же игр, сколько и выиграла. При каких n такое могло случиться? Ответ обоснуйте.

Ответ: При всех n, дающих при делении на 3 остаток 0 или 2.

Указание: Пронумеруем команды. Пусть a_i, b_i и c_i – количество побед, ничьих и поражений соответственно у команды с номером i. По условию задачи $a_i = b_i$ для всех i от 1 до $2n$. Следовательно, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n} = S$. А так как общее количество поражений равно общему количеству побед, то и $c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n} = S$. Таким образом,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n} + c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n} = 3S.$$

С другой стороны, левая часть последнего равенства равна удвоенному количеству игр в турнире. Которое, в свою очередь, равно $2n(2n-1)$. Следовательно, $3S = 2n(2n-1)$. Так как левая часть этого равенства кратна 3, то или n или $2n-1$ кратно 3. То есть или $n = 3k$ или $n = 3k+2$.
1) $n = 3k+2$. Предположим, что команда с номером i выиграла у команд с номерами $i+1$, $i+2$, $\ldots$, $i+2k+1$, проиграла командам с номерами $i-1$, $i-2$, $\ldots$, $i-(2k+1)$ и сыграла вничью с остальными $2k+1$ командой (будем считать, что номера команд цикличны, то есть команда с номером $2n+1$ – это первая команда и так далее). Очевидно, что при этом у каждой команды поровну и побед и ничьих.
2) $n = 3k$. Тогда общее количество команд делится на 6. Разобьем команды на группы по 6. Приведем пример таблицы для шести команд:

	1	2	3	4	5	6
1		0,5	0	0	1	0
2	0,5		0,5	1	0	1
3	1	0,5		0,5	0	1
4	1	0	0,5		0,5	1
5	0	1	1	0,5		0,5
6	1	0	0	0	0,5	

Легко видеть, что в этом случае у всех команд одинаковое количество ничьих и поражений. Теперь покажем как должны сыграть между собой команды из разных шестерок. Пронумеруем шестерки числами 1, 2, $\ldots$, k. Пусть в матчах команд из разных шестерок команда i из шестерки с меньшим номером выиграла у команд с номерами i и $i+1$, проиграла командам $i-2$ и $i-1$ и сыграла вничью с остальными двумя командами из шестерки с большим номером (нумерация команд в шестерке считается цикличной). Очевидно, что равенство ничьих и поражений остается выполненным для всех команд.

9 класс (указания для жюри)

1. Таня составила из натуральных чисел от 1 до 22 одиннадцать дробей (каждое число использовано ровно один раз и стоит либо в числителе, либо в знаменателе какой-то дроби). Какое наибольшее количество целых чисел могло получиться у Тани? Ответ обоснуйте.

Ответ: 10.

Указание: Рассмотрим числа 13, 17, 19. Эти числа – простые и среди остальных чисел нет тех, которые бы на них делились. Они сами могут разделиться только на число 1. Т. о., по крайней мере одна не целая дробь обязательно будет составлена. Покажем теперь как составить 11 дробей, 10 из которых целые:

$$\frac{17}{19}, \frac{13}{1}, \frac{22}{11}, \frac{21}{7}, \frac{14}{2}, \frac{15}{5}, \frac{20}{10}, \frac{9}{3}, \frac{18}{6}, \frac{16}{8}, \frac{12}{4}.$$

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что каждое из трёх чисел a^2+b+c, $a+b^2+c$, $a+b+c^2$ является точным квадратом? Ответ обоснуйте.

Ответ: Не существуют.

Указание: Предположим, такая тройка натуральных чисел существует. Тогда число a^2+b+c является точным квадратом и $a^2+b+c > a^2$. Отсюда получаем, что $a^2+b+c \geq (a+1)^2 = a^2+2a+1$, т. е. $b+c \geq 2a+1$. Аналогично $a+c \geq 2b+1$ и $a+b \geq 2c+1$. Складывая эти неравенства, получаем $2a+2b+2c \geq 2a+2b+2c+3$, что невозможно.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) на стороне BC выбрана точка D так, что $BD = 2CD$. На отрезке AD выбрана точка P так, что $\angle BPD = \angle BAC$. Докажите, что $\angle CPB = 90°$.

Указание: Продлим сторону AC треугольника за точку C на ее длину до точки Q. В треугольнике AQB отрезок BC является медианой, а точка D делит ее в отношении $2:1$, следовательно D – точка пересечения медиан треугольника AQB. Пусть H – точка пересечения AD с BQ. Тогда H – середина отрезка BQ. Кроме того $CQ = AC = BC$, следовательно $CH \perp BQ$. Отрезок CH является средней линией треугольника AQB, следовательно $CH \parallel AB$, а, значит, $\angle HCB = \angle ABC$. Но $\angle ABC = \angle BAC = BPD$, т. е. $\angle HCB = \angle HPB$. Отсюда получаем, что четырехугольник $PCHB$ вписанный, а поскольку $\angle CHB = 90°$, то $\angle CPB = 90°$.

4. В группе из 2013 людей любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что в этой группе найдётся человек, знакомый со всеми остальными.

Указание: Выберем человека у которого наибольшее число знакомых. Назовем его A. Пусть B_1, B_2, …, B_n – его знакомые. Легко понять, что у A больше двух знакомых, т. е. $n \geq 3$. Поскольку у A и B_i должен быть ровно один общий знакомый, то все B_i $(i = \overline{1,n})$ разбиваются на пары знакомых. Рассуждая аналогично, можно показать что каждый человек группы имеет четное число знакомых. Тогда $n = 2k$ и можем считать, что B_1 знаком с B_2, B_3 знаком с B_4, …, B_{n-1} знаком с B_n. Если A знаком со всеми остальными людьми группы, то требование задачи выполнено. Предположим в компании есть люди, отличные от B_1, …, B_n. Тогда каждый из них имеет с A общего знакомого, т. е. знаком с одним из B_i. Разделим остальных людей на n групп Φ_1, Φ_2, …, Φ_n таким образом, что в группу Φ_i входят люди знакомые с B_i. В силу нашего предположения не все группы Φ_i пусты. Пусть r_i – число людей в группе Φ_i. Пусть в Φ_1 есть человек C. У C и B_3 должен быть ровно один общий знакомый. Это не может быть A или B_4, следовательно это человек из группы Φ_3. Т. о., между группами Φ_1 и Φ_2 может быть установленно взаимно однозначное соответствие, следовательно $r_1 = r_3$. Аналогично можно показать, что $r_i = r_j$ для всех i и j. Пусть t – количество людей в каждой из групп Φ_i. У B_1 всего $t+2$ знакомых: t знакомых в Φ_1 и еще два знакомых A и B_2. Поскольку всего у B_1 должно быть четное число знакомых, то t – четное число.
Всего в этой группе $1+n+nt$ человек, следовательно $n(1+t) = 2012 = 4 \cdot 503$. Число $t+1 > 1$ и является нечетным делителем 2012, следовательно $t+1 = 503$, т. е. $t = 502$. Но тогда $n = 4$ и число знакомых у B_1 больше чем у A, что противоречит выбору A.

10 класс (указания для жюри)

1. Решите в целых числах уравнение $mn - m = n^3 + n^2 - 5$.

Ответ: Пары (m, n) могут принимать значения $(5, 0)$, $(7, 2)$, $(3, -2)$, $(25, 4)$.

Указание: Преобразуем уравнение к виду $m(n-1) = n^3 + n^2 - 5$. Легко проверить, что $n = 1$ условию не удовлетворяет, следовательно правая часть полученного равенства должна делиться на $n-1$. Но $n^3+n^2-5 = (n-1)(n^2+2n+2)-3$, следовательно 3 делится на $n-1$. Тогда $n-1$ может принимать значения ±1 и ±3, т.е. n может быть равно 0, 2, -2, 4. Для каждого из них находим соответствующее значение m.

2. В городе N проводится футбольный турнир, в котором каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу. После некоторого количества сыгранных игр выяснилось, что любые 5 команд можно расположить по кругу так, что каждая команда уже сыграла со своими соседями. Докажите, что можно составить расписание таким образом, чтобы за три дня турнир закончился, причём каждый день каждая команда играла бы не более одного матча.

Указание: Из условия следует, что каждая команда могла не сыграть максимум два матча (если есть команда A и еще три команды B, C, D с которыми она не сыграла, то для пятерки A, B, C, D, E не выполнено условие задачи). Рассмотрим граф в котором вершины – это команды, а две вершины соединены ребром, если соответствующие команды еще не играли между собой. Степень каждой вершины не больше двух, поэтому весь граф разбивается на простые циклы и цепочки (циклы без одного ребра), также могут быть вершины не соединенные с остальными (если соответствующая команда сыграла все свои игры). Рассмотрим некоторую цепочку. Пронумеруем каманды в ней числами от 1 до n. Игры между командами 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, ... проведем в первый день, а игры между командами 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7 проведем во второй день. Рассмотрим теперь цикл из m вершин. Игру между командами 1 и m назначим на третий день, а для остальных – так же, как и для цепочки.

3. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что для каждого действительного y существует действительное x такое, что $f(x) = y$, и при всех действительных x выполнено равенство

$$f(f(x)) = (x-1)f(x) + 2\,?$$

Ответ обоснуйте.

Ответ: Не существуют.

Указание: Предположим такая функция существует. Пусть для некоторых x и y оказалось, что $f(x) = f(y)$. Тогда $f(f(x)) = f(f(y))$, следовательно $(x-1)f(x) = (y-1)f(x)$. Отсюда получаем, что либо $x = y$, либо $f(x) = 0$.
Положим $x = 1$. Тогда $f(f(1)) = 2$. Существует такое вещественное x_0, что $f(x_0) = 0$. Тогда $f(f(x_0)) = f(0) = (x_0-1)f(x_0) + 2 = 2$. Т.о., $f(0) = f(f(1)) = 2$, следовательно $f(1) = 0$. Положим теперь $x = 0$. Тогда $f(f(0)) = f(2) = -f(0) + 2 = 0$, т.е. $f(2) = 0$.
Рассмотрим такое вещественное x_1, что $f(x_1) = 1$. Тогда $0 = f(1) = f(f(x_1)) = (x_1 - 1) + 2$, следовательно $(x_1-1)+2 = 0$, откуда $x_1 = -1$. Рассмотрим, наконец x_2 такое, что $f(x_2) = -1$. Тогда $1 = f(-1) = f(f(x_2)) = -(x_2-1)+2$, откуда $x_2 = 2$. Но тогда получаем, что $f(2) = -1$, а раньше было доказано, что $f(2) = 0$. Противоречие.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны и пересекаются в точке P. Окружности ω_1 и ω_2 описаны вокруг треугольников ABP и CDP соответственно, а их центры обозначены O_1 и O_2. Отрезок BC повторно пересекает ω_1 и ω_2 в точках S и T соответственно. Точки M и N – середины дуг SP и TP окружностей ω_1 и ω_2, не содержащих точек B и C. Докажите, что $MN \parallel O_1O_2$.

Указание: Обозначим Q вторую точку пересечения окружностей ω_1 и ω_2. Поскольку $\angle PCQ = \angle PDQ$, $\angle PAQ = \angle PBQ$, а $AC = BD$, то треугольники AQC и BQD равны. Тогда $\angle AQC = \angle BQD$, откуда получаем, что $\angle AQB = \angle CQD$. Из равенства треугольников также следует, что

$AQ = QB$ и $CQ = QD$. Т. о., треугольники AQB и CQD равнобедренные с равными углами при вершине. Тогда углы при основании у них тоже равны, т. е. $\angle(AB, BQ) = \angle(QC, CD)$. Но $\angle(AB, BQ) = \angle(AP, PQ)$, а $\angle(QC, CD) = \angle(QP, PD)$, следовательно $\angle APQ = \angle DPQ$, откуда получаем, что прямая PQ – биссектриса вертикальных углов APD и BPC. Точка M – середина дуги SP, следовательно BM – биссектриса угла CBP. Точка N – середина дуги TP, следовательно CN – биссектриса угла BCP. В итоге получаем, что прямые BM, CN, PQ – биссектрисы углов треугольника BPC, а, значит, они пересекаются в одной точке. Обозначим эту точку I. Ясно, что I – центр вписанной окружности треугольника BPC. Поскольку I лежит на прямой PQ – радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2, то $IM \cdot IB = IN \cdot IC$, следовательно четырехугольник $BMNC$ – вписанный. Тогда прямые BC и MN – антипараллельны относительно прямых IB и IC. Заметим, что поскольку прямая PQ является биссектрисой угла BPC, то она проходит через середину R дуги BC описанной окружности треугольника BPC. По теореме о трилистнике точка R является центром описанной окружности треугольника BIC. Тогда, в силу антипараллельности прямых BC и MN получаем, что $PQ \perp MN$. С другой стороны $PQ \perp O_1O_2$ (т. к. общая хорда двух окружностей перпендикулярна их линии центров). Отсюда получаем, что $MN \parallel O_1P_2$.

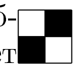
Третий этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике
(Харьковская область) 3 февраля 2014 года

11 класс (указания для жюри)

1. Известно, что для действительных x, y, z выполнены равенства $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$. Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3 = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

Указание: Из данного в условии равенства следует, что $x^3 + xy = xy^2 + zx$, $y^3 + yz = yz^2 + xy$, $z^3 + xz = x^2z + yz$. Сложим полученные равенства: $x^3 + y^3 + z^3 + xy + xz + yz = xy^2 + yz^2 + zx^2 + xy + xz + yz$, откуда и следует требуемое.

2. Тимур должен покрыть квадратный клетчатый стол $n \times n$ салфетками 2×2, изображёнными на рисунке. Салфеток у него неограниченное число. Каждая салфетка может покрывать ровно четыре клетки стола. Все клетки стола должны быть покрыты, салфетки могут накладываться друг на друга, но не могут выходить за границу стола. Салфетки можно поворачивать. Какое наименьшее число чёрных клеток может остаться видимым? Ответ обоснуйте.



Ответ: n клеток.

Указание: Заметим, что в каждом столбце на самой верхней салфетке обязательно будет видна черная клетка. Тогда видимыми остались по крайней мере n черных клеток. Можно добиться того, что черные клетки останутся только на главной диагонали (диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний). Положим сначала салфетку в левый нижний угол. Черные клетки сейчас расположены на диагонали длиной 2. Положим две салфетки так, чтобы эти черные клетки накрылись белыми, а черные теперь были расположены на диагонали длиной 3. Дальше сдвинем черные на диагональ длиной 4 и т. д. В итоге получим конфигурацию при которой черные клетки расположены на главной диагонали и все клетки под этой диагональю уже накрыты салфетками. Аналогично накроем салфетками клетки, расположенные выше главной диагонали.

3. Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC. Другая окружность, проходящая через точки A и C, пересекает отрезки BC и BA в точках D и E соответственно. Прямые AD и CE повторно пересекают ω в точках G и H соответственно. Касательные к окружности ω, проведенные в точках A и C, пересекают прямую DE в точках L и M соответственно. Докажите, что прямые LH и MG пересекаются в точке, принадлежащей ω.

Указание: Обозначим P точку пересечения прямой LH и ω. Докажем, что точки E, P, B, D лежат на одной окружности (тогда аналогично можно показать, что и MG пересекает ω в точке с таким же свойством, а окружности описанная окружность треугольника EBD может иметь с ω лишь одну общую точку, отличную от B). Заметим, что $\angle LAE = \angle ACD$ и $\angle LEA = 180^\circ - \angle AED = \angle ACD$. Т. о., $\angle LAE = \angle LEA$, следовательно $LE = LA$. По теореме о квадрате касательной $LA^2 = LH \cdot LP$. Тогда $LE^2 = LH \cdot LP$, а это означает, что LE – касательная к окружности, описанной вокруг треугольника EHP. Отсюда следует равенство направленных углов $\angle(EH, HP)$ и $\angle(DE, EP)$. Но точки H, P, B, C лежат на одной окружности, следовательно $\angle(EH, HP) = \angle(CH, HP) = \angle(CB, BP)$, т. е. выполнено равенство $\angle(DE, EP) = \angle(CB, BP) = \angle(DB, BP)$, но это и означает, что точки E, P, B, D лежат на одной окружности.

4. Серёжа хочет покрасить все целые числа в несколько цветов так, чтобы числа, разность которых является точной степенью, были покрашены в разные цвета. Хватит ли ему конечного числа цветов? Ответ обоснуйте. (Точной степенью называется число вида n^k, где n и k – натуральные числа, причём $k \geq 2$.)

Ответ: Нет.

Указание: Для доказательства мы найдем такие натуральные числа a_1, a_2, a_3, …, a_n, что любая разность $a_i - a_j$ является точной целой степенью. Тогда цветов должно быть хотя бы n. Построив такой набор для любого n, придем к противоречию.
Построение проведем по индукции. В качестве базы возьмем $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Переход от n к $n+1$. Пусть уже построены a_1, a_2, …, a_n. Возьмем за a_{n+1} произвольное еще не взятое число. Для достижения условия будем умножать весь набор a_1, a_2, …, a_n, a_{n+1} на одно и тоже число.

А именно, если $a_{n+1} - a_i$ не является точной степенью, а k_1, k_2, $\ldots$, k_m — все показатели степеней в нашей конструкции, то умножив все числа на $(a_{n+1} - a_i)^{k_1 k_2 \ldots k_m}$, все разности, которые были точными степенями — останутся ими, а $a_{n+1} - a_i$ – станет. Сделав так, если необходимо, для всех i от 1 до n, мы сделаем все разности точными степенями.