7 класс

Второй тур

1. Разрежьте квадрат 4×4 по линиям сетки на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.

2. На складе находилось 25 белых стеклянных чашек и 35 чёрных фарфоровых. Каждая стеклянная чашка при падении разбивается на 7 осколков, а каждая фарфоровая – на 8 осколков. Сторож перекрасил несколько стеклянных чашек в чёрный цвет, а несколько фарфоровых – в белый, после чего случайно разбил все чашки. Могло ли образоваться одинаковое количество белых и чёрных осколков? Ответ обоснуйте.

3. Серёжа покрасил все целые числа в несколько цветов так, что числа, разность которых является простым числом, покрашены в разные цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано? Ответ обоснуйте.

4. В клубе 30 джентльменов. У каждого джентльмена есть шляпа. Однажды каждый джентльмен отправил свою шляпу какому-то другому джентльмену (джентльмен мог получить более одной шляпы). Докажите, что можно выбрать 10 джентльменов так, чтобы ни один из них не отправлял другому шляпу.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 4 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 5 февраля).
Апелляция состоится 6 февраля с 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресам `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/`
`http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

7 клас

Другий тур

1. Розріжте квадрат 4×4 по лініях сітки на 9 прямокутників так, щоб рівні прямокутники не торкалися ані сторонами, ані вершинами.

2. На складі знаходилося 25 білих скляних чашок та 35 чорних фарфорових. Кожна скляна чашка при падінні розбивається на 7 уламків, а кожна фарфорова – на 8 уламків. Сторож перефарбував декілька скляних чашок у чорний колір, а декілька фарфорових – у білий, після чого випадково розбив усі чашки. Чи могла утворитися однакова кількість білих та чорних уламків? Відповідь обґрунтуйте.

3. Сергійко пофарбував усі цілі числа в декілька кольорів так, що числа, різниця яких є простим числом, пофарбовані у різні кольори. Яка найменша кількість кольорів могла бути використана? Відповідь обґрунтуйте.

4. У клубі 30 джентльменів. У кожного джентльмена є капелюх. Одного разу кожен джентльмен відправив свого капелюха якомусь іншому джентльмену (джентльмен міг отримати більше одного капелюха). Доведіть, що можна вибрати 10 джентльменів так, щоб жоден з них не відправляв іншому капелюха.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 5 лютого).
Апеляція відбудеться 6 лютого з 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресами `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/`
`http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

8 класс

Второй тур

1. Делегация некоторой страны на Олимпийских играх будет состоять из спортсменов и чиновников. Средний возраст спортсменов на начало олимпиады составит 22 года, а чиновников – 47 лет. При этом средний возраст всех членов делегации окажется равным 41 году. Какова в этой делегации доля чиновников? Ответ обоснуйте.

2. Натуральное число называется *упрощённым*, если оно является произведением ровно двух простых чисел (не обязательно различных). Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может оказаться упрощёнными? Ответ обоснуйте.

3. На сторонах AB и AD вписанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно таким образом, что $AP = CD$, $AQ = BC$. Докажите, что отрезок PQ делится диагональю AC пополам.

4. В однокруговом турнире участвовали $2n$ команд (каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу). После окончания турнира оказалось, что каждая команда сыграла вничью столько же игр, сколько и выиграла. При каких n такое могло случиться? Ответ обоснуйте.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 4 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами
и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 5 февраля).
Апелляция состоится 6 февраля с 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете
по адресам `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/`
`http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

8 клас

Другий тур

1. Делегація деякої країни на Олімпійських іграх буде складатися зі спортсменів та чиновників. Середній вік спортсменів на початок олімпіади складатиме 22 роки, а чиновників – 47 років. При цьому середній вік усіх членів делегації буде дорівнювати 41 року. Яка в цій делегації частка чиновників? Відповідь обґрунтуйте.

2. Натуральне число називається *спрощеним*, якщо воно є добутком рівно двох простих чисел (не обов'язково різних). Яка найбільша кількість послідовних натуральних чисел може виявитись спрощеними? Відповідь обґрунтуйте.

3. На сторонах AB і AD вписаного чотирикутника $ABCD$ відмічені точки P і Q відповідно таким чином, що $AP = CD$, $AQ = BC$. Доведіть, що відрізок PQ ділиться діагоналлю AC навпіл.

4. У турнірі в одне коло брало участь $2n$ команд (кожна команда зіграла з кожною рівно один раз). Після закінчення турніру виявилося, що кожна команда зіграла внічию стільки ж ігор, скільки й виграла. При яких n таке могло статися? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами
та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 5 лютого).
Апеляція відбудеться 6 лютого з 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті
за адресами `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/`
`http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

Третий этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике
(Харьковская область) 3 февраля 2014 года

9 класс

Второй тур

1. Таня составила из натуральных чисел от 1 до 22 одиннадцать дробей (каждое число использовано ровно один раз и стоит либо в числителе, либо в знаменателе какой-то дроби). Какое наибольшее количество целых чисел могло получиться у Тани? Ответ обоснуйте.

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c такие, что каждое из трёх чисел a^2+b+c, $a+b^2+c$, $a+b+c^2$ является точным квадратом? Ответ обоснуйте.

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) на стороне BC выбрана точка D так, что $BD = 2CD$. На отрезке AD выбрана точка P так, что $\angle BPD = \angle BAC$. Докажите, что $\angle CPB = 90°$.

4. В группе из 2013 людей любые двое имеют ровно одного общего знакомого. Докажите, что в этой группе найдётся человек, знакомый со всеми остальными.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 4 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 5 февраля).
Апелляция состоится 6 февраля с 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресам `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/` `http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

Третій етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики
(Харківська область) 3 лютого 2014 року

9 клас

Другий тур

1. Таня склала з натуральних чисел від 1 до 22 одинадцять дробів (кожне число було використане рівно один раз і стоїть або в чисельнику, або в знаменнику якогось дробу). Яка найбільша кількість цілих чисел могла вийти у Тані? Відповідь обґрунтуйте.

2. Чи існують натуральні числа a, b, c такі, що кожне з трьох чисел a^2+b+c, $a+b^2+c$, $a+b+c^2$ є точним квадратом? Відповідь обґрунтуйте.

3. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AC = BC$) на стороні BC обрано точку D так, що $BD = 2CD$. На відрізку AD обрано точку P так, що $\angle BPD = \angle BAC$. Доведіть, що $\angle CPB = 90°$.

4. У групі з 2013 людей будь-які двоє мають рівно одного спільного знайомого. Доведіть, що в цій групі знайдеться людина, яка знайома з усіма іншими.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 5 лютого).
Апеляція відбудеться 6 лютого з 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресами `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/` `http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

10 класс

Второй тур

1. Решите в целых числах уравнение $mn - m = n^3 + n^2 - 5$.

2. В городе N проводится футбольный турнир, в котором каждая команда должна сыграть с каждой ровно по одному разу. После некоторого количества сыгранных игр выяснилось, что любые 5 команд можно расположить по кругу так, что каждая команда уже сыграла со своими соседями. Докажите, что можно составить расписание таким образом, чтобы за три дня турнир закончился, причём каждый день каждая команда играла бы не более одного матча.

3. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая, что для каждого действительного y существует действительное x такое, что $f(x) = y$, и при всех действительных x выполнено равенство

$$f(f(x)) = (x-1)f(x) + 2\,?$$

Ответ обоснуйте.

4. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD равны и пересекаются в точке P. Окружности ω_1 и ω_2 описаны вокруг треугольников ABP и CDP соответственно, а их центры обозначены O_1 и O_2. Отрезок BC повторно пересекает ω_1 и ω_2 в точках S и T соответственно. Точки M и N – середины дуг SP и TP окружностей ω_1 и ω_2, не содержащих точек B и C. Докажите, что $MN \parallel O_1O_2$.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 4 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 5 февраля).
Апелляция состоится 6 февраля с 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресам `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/` `http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

10 клас

Другий тур

1. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $mn - m = n^3 + n^2 - 5$.

2. У місті N проводиться турнір з футболу, в якому кожна команда повинна зіграти з кожною рівно по одному разу. Після деякої кількості зіграних ігор з'ясувалося, що будь-які 5 команд можна розташувати по колу так, що кожна команда вже зіграла зі своїми сусідами. Доведіть, що можна скласти розклад таким чином, щоб за три дні турнір закінчився, причому кожен день кожна команда грала б не більше одного матчу.

3. Чи існує функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, така, що для кожного дійсного y існує дійсне x таке, що $f(x) = y$, і при всіх дійсних x виконана рівність

$$f(f(x)) = (x-1)f(x) + 2\,?$$

Відповідь обґрунтуйте.

4. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC та BD рівні й перетинаються в точці P. Кола ω_1 та ω_2 описані навколо трикутників ABP та CDP відповідно, а їх центри позначені O_1 та O_2. Відрізок BC вдруге перетинає ω_1 та ω_2 в точках S та T відповідно. Точки M та N – середини дуг SP та TP кіл ω_1 та ω_2, що не містять точок B та C. Доведіть, що $MN \parallel O_1O_2$.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 5 лютого).
Апеляція відбудеться 6 лютого з 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресами `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/` `http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

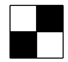
Третий этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике
(Харьковская область) 3 февраля 2014 года

11 класс

Второй тур

1. Известно, что для действительных x, y, z выполнены равенства $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$. Докажите, что $x^3 + y^3 + z^3 = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

2. Тимур должен покрыть квадратный клетчатый стол $n \times n$ салфетками 2×2, изображёнными на рисунке. Салфеток у него неограниченное число. Каждая салфетка может покрывать ровно четыре клетки стола. Все клетки стола должны быть покрыты, салфетки могут накладываться друг на друга, но не могут выходить за границу стола. Салфетки можно поворачивать. Какое наименьшее число чёрных клеток может остаться видимым? Ответ обоснуйте.



3. Пусть ω – описанная окружность треугольника ABC. Другая окружность, проходящая через точки A и C, пересекает отрезки BC и BA в точках D и E соответственно. Прямые AD и CE повторно пересекают ω в точках G и H соответственно. Касательные к окружности ω, проведенные в точках A и C, пересекают прямую DE в точках L и M соответственно. Докажите, что прямые LH и MG пересекаются в точке, принадлежащей ω.

4. Серёжа хочет покрасить все целые числа в несколько цветов так, чтобы числа, разность которых является точной степенью, были покрашены в разные цвета. Хватит ли ему конечного числа цветов? Ответ обоснуйте. (Точной степенью называется число вида n^k, где n и k – натуральные числа, причём $k \geq 2$.)

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 4 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 5 февраля).
Апелляция состоится 6 февраля с 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресам `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/` `http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`

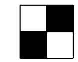
Третій етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики
(Харківська область) 3 лютого 2014 року

11 клас

Другий тур

1. Відомо, що для дійсних x, y, z виконуються рівності $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$. Доведіть, що $x^3 + y^3 + z^3 = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

2. Тимур повинен покрити квадратний клітчастий стіл $n \times n$ серветками 2×2, що зображені на рисунку. Серветок у нього необмежена кількість. Кожна серветка може покривати рівно чотири клітини столу. Всі клітини столу повинні бути покриті, серветки можуть накладатися одна на одну, але не можуть виходити за межі столу. Серветки можна повертати. Яка найменша кількість чорних клітинок може залишитися видимою? Відповідь обґрунтуйте.



3. Нехай ω – описане коло трикутника ABC. Інше коло, що проходить через точки A та C, перетинає відрізки BC та BA в точках D та E відповідно. Прямі AD та CE вдруге перетинають ω в точках G та H відповідно. Дотичні до кола ω, що проведені в точках A й C, перетинають пряму DE в точках L та M відповідно. Доведіть, що прямі LH та MG перетинаються в точці, що належить ω.

4. Сергійко хоче пофарбувати всі цілі числа в декілька кольорів так, щоб числа, різниця яких є точним степенем, були пофарбовані в різні кольори. Чи вистачить йому скінченної кількості кольорів? Відповідь обґрунтуйте. (Точним степенем називається число вигляду n^k, де n і k – натуральні числа, причому $k \geq 2$.)

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 4 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 5 лютого).
Апеляція відбудеться 6 лютого з 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресами `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/` `http://www.ri.kharkov.ua/olympiad/`