

1. Нерівності

1. Для дійсного a довести нерівність $\frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2$.

2. Для дійсних чисел a, b, c таких, що $a + 2b + 3c \geq 14$, довести нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 14.$$

3. Для дійсних чисел x, y довести нерівність $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$.

4. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a + b + c = 1$, довести нерівність

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

5. Для додатних чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ довести нерівність

$$\sqrt[3]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}.$$

2. Квадратні рівняння для Лєри

Розв'язати рівняння в дійсних числах.

1. $x^2 - x - 11$;

2. $2x^2 + 5x - 3 = 0$;

3. $17x^2 + 11x + 3 = 0$;

4. $3x^2 + 6x + 3 = 0$.

3. Діофантові рівняння

1. Розв'язати рівняння в цілих числах:

i) $4x^2 + y^2 = 12345678$;

ii) $3x^2 - 2x - 17 = 0$;

iii) $2x^2 + 3x - 2 = 0$;

iv) $8x^3 - 13y^3 = 17$;

v) $x^8 + y^6 = 1122$;

vi) $x^2 + 3y^2 = 4617$;

vii) $x^2 + 5y^4 = 112233$;

viii) $35x^4 + 24y^3 = 100000$;

ix) $x^3 + 117y^3 = 5$;

x) $-x^2 + 7y + 6 = 0$;

xi) $x^2 + y^2 + z^2 = 2011$;

xii) $x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{14}^4 = 1999$.

2. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 + y^2 = 512$.

3. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

4. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$.

5. Для яких $a \in \mathbb{N}$ існують такі $x, y \in \mathbb{N}$, що $x^2 + y^2 = axy$?

6. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

7. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^4 + xy^2 - 72 = 0$.

8. Розв'язати рівняння в цілих числах $xy + x^2y^2 - 72 = 0$.

9. Розв'язати рівняння в цілих числах $x^2 + 3y^2 = 36 - 4xy$.