

## Всяка всячина

1. Чи існують цілі числа  $x$  і  $y$  :  
$$x^2 + 4xy = 45$$
$$y^2 - 6xy = 56$$
2. Відомо, що  $a^2 - b^2 = 2$ . Знайти  $a^6 - a^4b^2 - 2b^4 - 8b^2$ .
3. Відомо, що числа  $x, y$  задовольняють рівність:  $x^3 + xy + y^3 = 3$ .  
Знайти значення виразу:  $x^6 + y^6 + x^4y + xy^4 + 2x^3y^3 + 3xy$ .
4. Позначимо через  $S(x)$  суму цифр натурального числа  $x$ .  
Розв'яжіть рівняння:  
а)  $x + S(x) + S(S(x)) = 2011$ ;  
б)  $x + S(x) + S(S(x)) + S(S(S(x))) = 2011$ .
5.  $a, b, n$  – натуральні числа такі, що  $(a + 4b)(b + 4a) = 5^n$ . Доведіть, що  $a = b$ .
6. Докажіть, що 1111103 не є а) квадратом; б) сумою двох квадратів.
7. Знайти всі  $n$  для яких  $n^2 + 1$  ділиться на  $n + 1$ .
8. Відомо, що для натуральних  $k, m, n$  і  $q$  виконується рівність  $2(k^2 + km) + m^2 + n^2 = 2013^q$ , при чому числа  $k$  і  $m$  – взаємно прості.  
Доведіть, що числа  $n$  і  $k^2 + km$  не є взаємно простими.
9. У квадраті  $ABCD$  на сторонах  $AD$  та  $DC$  вибрані точки  $M$  та  $N$  відповідно таким чином, що  $\angle BMA = \angle NMD = 60^\circ$ . Знайдіть величину кута  $MBN$ .
10. Заданий рівнобедрений трикутник  $ABC$  з вершиною у точці  $B$ . На основі  $AC$  вибрана довільна точка  $D$ , відмінна від вершин  $A$  та  $C$ . На прямій  $AC$  вибираємо таку точку  $E$  поза відрізком  $AC$ , для якої  $AE = CD$ . Доведіть, що периметр  $\triangle BDE$  більший за периметр  $\triangle ABC$ .
11. У трикутнику  $ABC$  проведена медіана  $BD$ , яка ділиться на три рівні частини точками  $E$  та  $F$  ( $BE = EF = FD$ ). Відомо, що  $AD = AF$  та  $AB = 1$ . Знайдіть довжину відрізка  $CE$ .
12. У шаховій секції займаються 5 дівчат і 12 хлопчиків.  
Скількома способами можна скласти команду з 2 дівчат та 5 хлопчиків для участі у змаганнях?

13. Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів вибору, при яких він обере рівно 3 виграшні білети?
14. Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило не менше 3 мулярів?
15. З 20 осіб потрібно створити комісію із 7 осіб, причому Петро Іванович та Іван Петрович не повинні входити до комісії одночасно. Скількома способами це можна зробити?