Літні тренувальні збори 2012 року. Олімпіада

Перший день

1. Нехай ABC — гострокутний трикутник, H — його ортоцентр. Зовнішня бісектриса кута BHC перетинає сторони AB і AC в точках D й E відповідно. Внутрішня бісектриса кута BAC вдруге перетинає описане коло трикутника ADE в точці K. Доведіть, що HK проходить через середину сторони BC.

2. Задано ціле число a. Доведіть, що існує нескінченна кількість простих p, для яких існують цілі n і m такі, що $p \mid n^2 + 3$ і $p \mid m^3 - a$.

3. Правильний трикутник T зі стороною n склали із правильних трикутників зі стороною 1, після чого з T забрали n одиничних трикутників тієї ж орієнтації, що й T. Ромб, який утворюють два суміжних трикутники зі стороною 1, назвімо *діамантом*. Доведіть, що T можна розбити на діаманти тоді й лише тоді, коли для всіх $k = \overline{1, n}$ довільний правильний трикутник зі стороною довжини k, що лежить у T, проходить по лініях сітки і має ту ж орієнтацію, що T, містить не більш як k прибраних трикутників.

Другий день

4. Нехай $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен із цілими коефіцієнтами степеня $n \geqslant 3$ такий, що парними є коефіцієнт a_0 і кожна з сум $a_k + a_{n-k}$, $k \in \overline{1, n-1}$. Хай також $f = gh$, де g й h — многочлени з цілими коефіцієнтами, $\deg g \leqslant \deg h$ і до того ж усі коефіцієнти h непарні. Доведіть, що f має цілий корінь.

5. У турнірі змагаються m учасників, яких оцінюють n суддів, де $n \geqslant 3$ — непарне число. Кожен суддя поставив кожному учаснику одну з двох оцінок: «задовільно» чи «незадовільно». Оцінки довільної пари суддів збігаються не більше ніж для k учасників. Доведіть, що
$$\frac{k}{m} \geqslant \frac{n-1}{2n}.$$

6. Уписане коло трикутника ABC дотикається до його сторін BC, CA й AB в точках D, E та F відповідно. Нехай X — точка на цьому колі, відмінна від D, E, F. Прямі XD і EF, XE і FD, XF і DE перетинаються в точках J, K, L відповідно. На сторонах BC, CA й AB трикутника вибрано відповідно точки M, N і P такі, що прямі AM, BN і CP перетинаються в одній точці. Доведіть, що прямі JM, KN і LP також перетинаються в одній точці.