

Рахункові методи в геометрії

Олімпіадні задачі з геометрії часто розв'язуються за допомогою доведення тих чи інших алгебраїчних тотожностей. Основними засобами у цьому можуть слугувати:

- теорема Фалеса;
- теорема Менелая, Чеви, кутова форма теореми Чеви;
- теорема синусів;
- теорема косинусів;
- тригонометричні тотожності;
- степінь точки та теорема про квадрат дотичної.

Теорема 1. Нехай A, B, C, D — довільні точки площини. Доведіть, що $AC \perp BD$ тоді і тільки тоді, коли $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$.

Наслідок 1. Нехай ω_1 і ω_2 — кола з центрами O_1 та O_2 відповідно ($O_1 \neq O_2$). Доведіть, що $AB \perp O_1O_2$ тоді і тільки тоді, коли $p(A, \omega_1) - p(A, \omega_2) = p(B, \omega_1) - p(B, \omega_2)$. ($p(X, \omega)$ — степінь точки X відносно кола ω).

Задача 1. Чотирикутник $ABCD$ такий, що $AB = AC = BD$. Точка P — перетин його діагоналей, I та O — центри описаного та вписаного кіл трикутника ABP відповідно, причому I та O не співпадають. Доведіть, що $OI \perp CD$.

Теорема 2. Якщо $\alpha + \beta = \gamma + \delta < \pi$ та

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}$$

то $\alpha = \gamma$ та $\beta = \delta$.

Вправа 1. Нехай AK — чевіана трикутника ABC . Доведіть, що

$$\frac{\sin \angle BAK}{\sin \angle KAC} = \frac{KB \cdot AC}{KC \cdot AB}$$

Задача 2. Дотичні до описаного кола трикутника ABC в точках B та C перетинаються в точці S . Доведіть, що AS — симедіана трикутника ABC .

Задача 3. На бісектрисі AL трикутника ABC вибрані точки K та M . Прямі BK та CM перетинаються в точці P , а прямі CK та BM — в точці Q . Доведіть, що $\angle PAB = \angle QAC$.

Задача 4. В гострокутому трикутнику ABC висоти AH_1, BH_2, CH_3 перетинаються в ортоцентрі H . Перпендикуляр з H на H_1H_3 перетинає пряму AB в P , а перпендикуляр з H на H_1H_2 перетинає пряму AC в Q . Доведіть, що перпендикуляр з A на H_2H_3 ділить відрізок PQ навпіл.

Задача 5. (IMO SL 2016 G2) Дано трикутник ABC з описаним колом Γ і інцентром I . Нехай M — середина BC . Позначимо через D перпендикуляр з I на BC . Пряма, що проходить через I перпендикулярно AI перетинає сторони AB і AC в точках F і E відповідно. Нехай описане коло трикутника AEF перетинає Γ вдруге в X . Доведіть, що прямі XD та AM перетинаються на Γ .

Задача 6. Бісектриси AL і BK перетинають описане коло трикутника ABC в точках P і Q . Доведіть, що дотична до описаного кола трикутника ABC в точці C , прямі LK і PQ перетинаються в одній точці.

Додому

Задача 1. Вписане коло ω трикутника ABC з центром в I дотикається сторін BC , AC та AB в точках A' , B' та C' . Пряма $A'I$ вдруге перетинає $B'C'$ в точці M . Доведіть, що пряма AM містить медіану трикутника ABC .

Задача 2. Нехай M — довільна внутрішня точка бісектриси AL трикутника ABC . Через точку L проведено довільну пряму, яка перетинає сторону AB в точці P , а продовження сторони AC за точку C — у точці Q . Нехай N — точка перетину прямих BM і LQ , а K — точка перетину прямих BC і PQ . Доведіть, що $\angle NAL = \angle KAL$.

Задача 3. Нехай H — ортоцентр трикутника ABC . Пряма, що проходить через H , перетинає сторони AC та AB в точках M та N відповідно. Описане коло ω трикутника MNA вдруге перетинає описане коло трикутника ABC в точці P . Пряма PH вдруге перетинає ω в точці Q . Доведіть, що $MN \perp AQ$.

Задача 4. Нехай ω — описане коло рівностороннього трикутника ABC . Дотична до ω в точці B перетинає бісектрису кута C в точці K . Бісектриса зовнішнього кута C вдруге перетинає ω в точці L . Прямі AC та BL перетинаються в точці M . Доведіть, що відрізок AB ділиться навпіл прямою MK .