

Графи — 2

Розминка

1. Джордж, приїхавши із Діснейленду, розказував, що там на зачарованому озері є 7 островів, з кожного з яких веде 1, 3 або 5 мостів. Чи правда, що хоча б один з цих мостів обов'язково виходить на берег міста?
2. У місті N від кожної площі відходить рівно 5 вулиць, що з'єднують площі. Довести, що кількість площ — парна, а кількість вулиць ділиться на 5.

Задачі

Означення. Простий шлях у графі — це шлях, в якому жодне ребро не зустрічається двічі.

1. Дерево — це граф, у якому будь-які дві вершини з'єднані рівно одним простим шляхом.
2. Довести, що при видаленні будь-якого ребра з дерева воно перетворюється в незв'язний граф.
3. 12 команд взяли участь у турнірі з волейболу в один круг. Дві команди одержали рівно по 7 очок. Довести, що знайдуться команди A , B , C такі, що A перемогла у B , B перемогла у C , а C перемогла в A .
4. Довести, що існує граф з $2n$ вершинами, степені яких дорівнюють $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$.
5. Довести, що граф з n вершинами, степінь кожної з яких не менше $\frac{n-1}{2}$, — зв'язний.
6. У компанії із семи хлопців кожний має серед решти не менше трьох братів. Довести, що усі хлопці — брати.

Означення. Граф називається ейлеровим, якщо його можна обійти, побувавши в кожному ребрі рівно один раз.

Теорема. Зв'язний граф — ейлеровий тоді і тільки тоді, коли у ньому не більше двох непарних вершин.

7. Жук повзе по ребрам куба. Чи зможе він послідовно обійти усі ребра, проходячи по кожному ребру тільки один раз?
8. У зв'язному графі степені усіх вершин парні. Довести, що на ребрах цього графа можна розставити стрілки так, щоб виконувались наступні умови:
 - i) рухаючись по стрілках, можна з будь-якої вершини дістатися до будь-якої іншої;
 - ii) для кожної вершини кількість вхідних ребер дорівнює кількості вихідних.