

Разные задачи -3

Хилько Данил dkhilko@ukr.net

Задача 1. На колі ω дано три точки A, B, P . Доведіть, що якщо a, b — відстані від P до дотичних до ω в A, B відповідно, а c — відстань від P до хорди AB , то $c^2 = ab$.

Задача 2. В гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AD, BE та CF . Відмітимо H — ортоцентр. Доведіть, що

$$\frac{AB \cdot AC + BC \cdot CA + CA \cdot CB}{AH \cdot AD + BH \cdot BE + CH \cdot CF} \leq 2.$$

Задача 3. Дано вписаний чотирикутник $ABCD$ з непаралельними протилежними сторонами. Нехай X та Y — точки перетину AB, CD та AD, BC відповідно. Бісектриса кута $\angle AXD$ перетинає AD, BC в E, F відповідно, а бісектриса кута $\angle AYB$ перетинає AB, CD в G, H відповідно. Доведіть, що $EFGH$ — паралелограм.

Задача 4. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Всередині $ABCD$ взято точку P , для якої $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$. Прямі AD та BC перетинаються в Q , а прямі AB та CD перетинаються в R . Доведіть, що кут між прямими PQ та PR дорівнює куту між діагоналями $ABCD$.

Задача 5. В трикутнику ABC M — точка пересечения медіан, I — центр вписаної окружності, A_1, B_1 — точки касання цієї окружності со сторонами AB и AC , G — точка пересечения AA_1 и BB_1 . Докажіть, что $\angle CGI$ прямой тогда и только тогда, когда $GM \parallel AB$.