ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

25 січня – 26 січня 2014 року, м.Львів

7 клас

1. Периметр трикутника більший від довжин його трьох сторін на 1007, 509 і 498 см, відповідно. Знайти периметр трикутника. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Такого трикутника нема. **Розв'язок.** Нехай a, b, c — довжини сторін трикутника, а $p = a + b + c$ — його периметр. Тоді, за умовою,

$$p = a + b + 1007, \quad p = a + c + 509, \quad p = b + c + 498.$$

Додаючи ці три рівності отримуємо $3p = 2p + 2014$, звідки $p = 2014$, але у цьому випадку $a + b = 498 + 509 = 1007 = c$.

2. Знайдіть всі корені рівняння

$$2014|x - 2015| = \frac{x}{2014} + 2015,$$

які задовольняють умову $2014 \le x \le 2016$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Рівняння на заданому проміжку коренів не має. **Розв'язок.** При $x \ge 2015$ послідовно маємо

$$2014(x - 2015) = \frac{x}{2014} + 2015 \;\Leftrightarrow\; (2014 - \frac{1}{2014})x = 2015^2 \;\Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2015^2}{2014^2 - 1} \cdot 2014 = \frac{2015}{2013} \cdot 2014 > 2016,$$

позаяк остання нерівність при $t = 2016$ перетворюється у нерівність

$$\frac{(t-1)(t-2)}{t-3} > t \;\Leftrightarrow\; t^2 - 3t + 2 > t^2 - 3t \;\Leftrightarrow\; 2 > 0.$$

Подібно при $x < 2015$ послідовно маємо

$$2014(2015 - x) = \frac{x}{2014} + 2015 \;\Leftrightarrow\; (2014 + \frac{1}{2014})x = 2013 \cdot 2015 \;\Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2013 \cdot 2014 \cdot 2015}{2014^2 + 1} = \frac{(t-1)t(t+1)}{t^2 + 1} = \frac{(t^2 - 1)t}{t^2 + 1} < t,$$

при $t = 2014$.

3. Добуток тризначного числа на суму його цифр дорівнює 3211. Знайти всі такі тризначні числа. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. 247.
Розв'язок. Нехай $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ — тризначне число, $x + y + z$ — сума його цифр. Оскільки $3211 = 13^2 \cdot 19$, а сума цифр шуканого числа не може перевищувати 27, то з рівності

$$(100x + 10y + z) \cdot (x + y + z) = 13^2 \cdot 19$$

негайно отримуємо дві системи рівнянь

$$\begin{cases} 100x + 10y + z = 169, \\ x + y + z = 19, \end{cases} \qquad \begin{cases} 100x + 10y + z = 247, \\ x + y + z = 13. \end{cases}$$

Віднімаючи у першій системі від першого рівняння друге, отримуємо $9(11x+y) = 150$, що неможливо, позаяк права частина останньої рівності не ділиться на 9. Віднімаючи подібно від першого рівняння у другій системі друге рівняння, отримуємо, що

$$9(11x + y) = 234 = 9 \cdot 26 \Leftrightarrow 11x + y = 26 \Leftrightarrow x = 2, y = 4.$$

4. Велосипедист виїхав з готелю на прогулянку гірською дорогою у напрямку перевалу о 8^{00}. О котрій годині він повернувся цією ж дорогою до готелю, якщо відомо, що рухаючись без зупинок, по рівнинних ділянках він їхав зі швидкістю 20 км/год, вниз — 30 км/год, а вгору — 15 км/год, і подолав відстань 50 км? Відповідь обгрунтувати.
Відповідь. О 13^{00}. **Розв'язок.** Нехай S_1, S_2, S_3 — сумарні довжини прирусі від готелю, відповідно, рівнинних ділянок, спусків і підйомів. Тоді загальний час руху дорівнює

$$T = \frac{2S_1}{20} + \frac{S_2 + S_3}{30} + \frac{S_3 + S_2}{15} = \frac{S_1}{10} + \frac{3(S_2 + S_3)}{30} = \frac{50}{10} = 5(\text{год}).$$

5. Знайти всі пари натуральних чисел x, y, для яких виконується рівність

$$xy(x + 17y) = 2014.$$

Відповідь обгрунтувати.
Відповідь. $(x, y) = (19, 2)$. **Розв'язок.** Оскільки $2014 = 1 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53$, $x \geq 1$, то $17y^2 < 2014$, звідки, $y < 12$, а з огляду на розклад числа 2014 на прості множники $y \in \{1, 2\}$. Випадок $y = 1$, очевидно, є неможливим, а у випадку $y = 2$ отримуємо $x = 19$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

25 січня – 26 січня 2014 року, м.Львів

8 клас

1. Знайдіть всі корені рівняння

$$2014|x-2015| = \frac{x}{2014} + 2015,$$

які задовольняють умову $2013,999 \le x \le 2016,001$. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in \left\{\frac{2015}{2013} \cdot 2014, \frac{2013 \cdot 2014 \cdot 2015}{2014^2+1}\right\}$. **Розв'язок.** При $x \ge 2015$ послідовно маємо

$$2014(x-2015) = \frac{x}{2014} + 2015 \;\Leftrightarrow\; (2014 - \frac{1}{2014})x = 2015^2 \;\Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2015^2}{2014^2-1} \cdot 2014 = \frac{2015}{2013} \cdot 2014 < 2016,001,$$

позаяк остання нерівність при $t = 2016$ перетворюється у нерівність

$$\frac{(t-1)(t-2)}{t-3} < t + 0,001 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 3t + 2 < t^2 - 3t + 0,001(t-3) \;\Leftrightarrow\; 2 < 2,013.$$

Подібно при $x < 2015$ послідовно маємо

$$2014(2015-x) = \frac{x}{2014} + 2015 \;\Leftrightarrow\; (2014 + \frac{1}{2014})x = 2013 \cdot 2015 \;\Leftrightarrow$$
$$x = \frac{2013 \cdot 2014 \cdot 2015}{2014^2+1} = \frac{(t^2-1)t}{t^2+1} > t - 0,001 \;\Leftrightarrow$$
$$t^3 - t > t^3 + t - 0,001(t^2+1) \;\Leftrightarrow\; 2t < 0,001(t^2+1) \Leftarrow\; 2 < 2,014,$$

при $t = 2014$.

2. Цілі числа m, n такі, що число $\dfrac{n^2}{n + 2014 \cdot m}$ — ціле. Чи число

$$\frac{2014^2 \cdot m^3}{n + 2014 \cdot m} \text{ — ціле?}$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Так, ціле. **Розв'язок.**

$$\frac{2014^2 \cdot m^2}{n + 2014 \cdot m} = \frac{n^2}{n + 2014 \cdot m} + \frac{2014^2 \cdot m^2 - n^2}{n + 2014 \cdot m} = \frac{n^2}{n + 2014 \cdot m} + 2014 \cdot m - n$$

— ціле число. Тому, число $\dfrac{2014^2 \cdot m^3}{n + 2014 \cdot m}$ — ціле.

3. Нехай a, b, c — довжини сторін деякого трикутника. Відомо, що його периметр більший від $a+b$ в $1,2$ рази, а від $a+c$ в $1,125$ рази. У скільки разів периметр більший від $b+c$? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Такого трикутника нема. **Розв'язок.** За умовою,

$$p = \frac{6}{5} \cdot (a+b), \quad p = \frac{9}{8} \cdot (a+c),$$

звідки $a + b = \frac{5}{6} \cdot p \Rightarrow c = \frac{1}{6} \cdot p$, а $a + c = \frac{8}{9} \cdot p \Rightarrow b = \frac{1}{9} \cdot p$, тому $b + c = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) \cdot p = \frac{5}{18} \cdot p < 1318p = a$. Суперечність з нерівністю трикутника.

4. Велосипедист виїхав з готелю на прогулянку гірською дорогою у напрямку перевалу о 8^{00}. О котрій годині він повернувся цією ж дорогою до готелю, якщо відомо, що рухаючись без зупинок, по рівнинних ділянках він їхав зі швидкістю 20 км/год, вниз — 30 км/год, а вгору — 15 км/год, і подолав відстань 50 км? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. О 13^{00}. **Розв'язок.** Нехай S_1, S_2, S_3 — сумарні довжини прирусі від готелю, відповідно, рівнинних ділянок, спусків і підйомів. Тоді загальний час руху дорівнює

$$T = \frac{2S_1}{20} + \frac{S_2 + S_3}{30} + \frac{S_3 + S_2}{15} = \frac{S_1}{10} + \frac{3(S_2 + S_3)}{30} = \frac{50}{10} = 5(\text{год}).$$

5. Знайти всі пари натуральних чисел x, y, для яких виконується рівність

$$xy(3y - 2x) = 2014.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $(x, y) = (2, 19)$. **Розв'язок.** Оскільки $3y-2x \geq 1$, то $x \leq (3y-1)/2 < 3y/2$ і, тому, $2014 < 3xy^2 < 9y^3/2$, звідки, $y^3 > 448$ і, отже, $y \geq 8$. Звідси, з огляду на розклад числа $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ на прості множники $y \in \{19, 38, 53, 106\}$. У випадку $y = 19$ маємо $19x(57 - 2x) = 2 \cdot 19 \cdot 53$, тому $x(57 - 2x) = 2 \cdot 53$, звідки $x = 2$.

Нескладно подібно перевіряється, що інші випадки $y = 53, 38, 106$ є неможливими.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

25 січня – 26 січня 2014 року, м.Львів

9 клас

1. Визначити всі значення параметра a, при яких рівняння

$$(a-3)x = a-3, \quad (a-3)(a+4)x = (a-3)(a+4)$$

є рівносильними. Відповідь обгрунтувати.
Відповідь. Для $a \neq -4$.
Розв'язок. Перше рівняння при $a \neq 3$ має єдиний корінь $x = 1$, а при $a = 3$ коренями цього рівняння є всі дійсні числа.

Друге рівняння має єдиний корінь $x = 1$ при $a \notin \{3, -4\}$, і при $a \in \{3, -4\}$ коренями цього рівняння є всі дійсні числа.

2. Цілі числа m, n такі, що число $\dfrac{n^2}{n + 2014 \cdot m}$ — ціле. Чи число

$$\frac{2014^2 \cdot m^3}{n + 2014 \cdot m} \text{ — ціле?}$$

Відповідь обгрунтувати.
Відповідь. Так, ціле. **Розв'язок.**

$$\frac{2014^2 \cdot m^2}{n + 2014 \cdot m} = \frac{n^2}{n + 2014 \cdot m} + \frac{2014^2 \cdot m^2 - n^2}{n + 2014 \cdot m} = \frac{n^2}{n + 2014 \cdot m} + 2014 \cdot m - n$$

— ціле число. Тому, число $\dfrac{2014^2 \cdot m^3}{n + 2014 \cdot m}$ — ціле.

3. Периметри двох подібних прямокутних трикутників відносяться як 1: 8. В одного з трикутників довжина гіпотенузи більша за довжину більшого катета на 16 см, а у іншого – сума довжин гіпотенузи і меншого катета дорівнює 16 см. Знайдіть довжини сторін цих трикутників.
Відповідь. $(a, b, c) = (64, 48, 80)$, $(a_1, b_1, c_1) = (8, 6, 10)$.
Розв'язок. Нехай a, b, c та a_1, b_1, c_1— довжини сторін більшого і меншого трикутників, відповідно, а p, p_1 — їхні периметри. Тоді, з умови $p = 8p_1$ отримуємо, що $a = 8a_1, b = 8b_1, c = 8c_1$. Припустимо, що $b < a < c$. Тоді, за умовою $c = a + 16 \Rightarrow c_1 = a_1 + 2$, а також $c_1 + b_1 = 16$. Підставляючи $a_1 = c_1 - 2$, $b_1 = 16 - c_1$ піфагорову тотожність $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$, отримуємо

$$c_1^2 = (c_1 - 2)^2 + (16 - c_1)^2 \Leftrightarrow c_1^2 - 36c_1 + 260 = 0,$$

звідки $c_1 \in \{10, 26\}$, а за умовою $c_1 + b_1 = 16$ отримуємо $c_1 = 10$. Звідси, $b_1 = 6, a_1 = 8$. Тому, $a = 8a_1 = 64, b = 8b_1 = 48, c = 8c_1 = 80$.

4. Довести, що для кожного натурального значення n ціла частина $[a]$ числа

$$a = (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$$

при діленні на 4 дає остачу 1. Нагадаємо, що цілою частиною $[a]$ дійсного числа a називається найбільше ціле число, яке не перевищує цього числа, наприклад, $[-0,5] = -1, [0,5] = 0, [3,5] = 3$.

Розв'язок. Зауважимо, що

$$a \geq 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} > 2n + 1 + 2\sqrt{n^2} = 4n + 1.$$

Але,

$$n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)} < (n + \frac{1}{2})^2 \Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1 \Leftrightarrow 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n + 2 \Leftrightarrow a < 4n + 2$$

Отже, $[a] = 4n + 1$.

5. Нехай x_1, x_2, x_3 числа, що належать до проміжку $[0, 1]$. Довести, що

$$(1 + x_1)(2x_2 - x_2^2)(2x_3 - x_3^2) + (1 - x_1)(x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2) \leq 2.$$

Розв'язок. Позначимо

$$a = (2x_2 - x_2^2)(2x_3 - x_3^2), \quad b = (x_2 - x_2^2)(x_3 - x_3^2).$$

Зрозуміло, що тоді $a \geq b \geq 0$ для будь-яких $x_2, x_3 \in [0, 1]$. Нехай $f(x) = a(1 + x) + b(1 - x) = (a - b)x + a + b$. Тоді, $f(x) \leq f(1) = 2a$ для всіх $x \in [0, 1]$. Залишається зауважити, що $0 \leq 2t - t^2 \leq 1$ $(0 \leq t \leq 1)$ і, тому, $a \leq 1$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

25 січня – 26 січня 2014 року, м.Львів

10 клас

1. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$\frac{x+4}{x+a} = 4a, \quad \frac{2x+4}{x+a} = 8a$$

є рівносильні. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $a = 0,25$.

Розв'язок. Оскільки ОДЗ обидвох рівнянь $x \neq -a$, то нескладно переконуємось, що перше рівняння при $a \in \{0,25; 4\}$, а друге при $a \in \{0,25; 2\}$ не мають розв'язку. При $a \neq 0,25$ корені першого і другого рівнянь, відповідно,

$$x = -\frac{4a^2-4}{4a-1}, \quad x = -\frac{4a^2-2}{4a-1},$$

і є різними.

2. Для всіх дійсних значень параметра a розв'язати нерівність

$$\sqrt[2013]{x+2a} + \sqrt[2014]{x-2a} < \sqrt[2013]{4a}.$$

Відповідь. Розв'язків нема.

Розв'язок. Функція $f(x) = \sqrt[2013]{x+2a} + \sqrt[2014]{x-2a}$ є визначеною і зростаючою на інтервалі $[2a, +\infty)$. Оскільки $f(2a) = \sqrt[2013]{4a}$, то для всіх $x > 2a$ виконується нерівність $f(x) > \sqrt[2013]{4a}$.

3. Довести, що для будь-якого прямокутного трикутника виконуються нерівності

$$0,4 < \frac{r}{h} < 0,5,$$

де r — радіус вписаного кола, h — висота, проведена до гіпотенузи.

Розв'язок. Нехай a, b — довжини катетів, — довжина гіпотенузи. Площа трикутника

$$S = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{1}{2}ch \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c}.$$

За нерівністю трикутника $a + b > c$, тому $\frac{r}{h} < \frac{c}{c+c} = 0,5$. Оскільки $a^2 + b^2 \geq 2ab$ і $c^2 = a^2 + b^2$, то додавши ці нерівності отримаємо

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a+b)^2 \Rightarrow 2c^2 \geq (a+b)^2 \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2}c \Rightarrow$$
$$\frac{r}{h} = \frac{c}{a+b+c} \geq \frac{c}{\sqrt{2}c + c} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1 > 0,4.$$

4. Довести, що рівняння

$$x^{2014} = y(y + x)(y + 2x)(y + 3x)\dots(y + 2013x)$$

у цілих числах x, y має єдиний розв'язок.
Розв'язок. Зауважимо, що рівняння має розв'язок $x = y = 0$. При $y \neq 0$ поділимо рівняння на y^{2014}. Тоді отримаємо рівняння

$$z^{2014} - (1 + z)(1 + 2z)(1 + 3z)\dots(1 + 2013z) = 0,\ z = \frac{x}{y}.$$

У цьому рівнянні старший коефіцієнт 1, а вільний коефіцієнт дорівнює -1. Раціональними коренями цього рівняння можуть бути лише числа 1 і -1. Легко перевірити, що вони не є коренями цього рівняння.

5. Знайти всі значення параметра **a**, при яких рівняння

$$1 + \sin^2 ax = \cos x$$

має єдиний розв'язок?
Відповідь. **a** — довільне ірраціональне число. **Розв'язок.** Зауважимо, що $x = 0$ є розв'язком рівняння. Оскільки $\cos x \leq 1$, а $1 + \sin^2 \mathbf{a}x \geq 1$, то рівність можлива коли $\cos x = 1$ і $\sin^2 \mathbf{a}x = 0$. Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos x = 1; \\ \sin \mathbf{a}x = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \mathbf{a}x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Звідси, $\mathbf{a} = \frac{n}{2k}$. Отже, якщо **a** — ірраціональне число, то з останньої рівності маємо суперечність і, тому, у цьому випадку рівняння має лише один корінь $x = 0$. Якщо ж $\mathbf{a} = \frac{p}{q}$ — раціональне число, де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, то , наприклад, кожне число $x = 2\pi qj$, $j \in \mathbb{N}$ є розв'язком рівняння.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

25 січня – 26 січня 2014 року, м.Львів

11 клас

1. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$3\cdot 25^x+2\cdot 15^x=5\cdot 3^{2x}\quad \text{і}\quad a\cdot 5^{2x-1}+|a-5|5^{x-1}=1$$

є рівносильні.

Відповідь. $a\in[0,5]\cup\{-5\}$. **Розв'язок.** Перше рівняння має єдиний розв'язок $x=0$. Підставляючи його в друге рівняння, отримуємо

$$\frac{a}{5}+\frac{|a-5|}{5}=1\Leftrightarrow |a-5|=5-a\Leftrightarrow a\le 5.$$

Але тоді друге рівняння переписується у вигляді

$$a\cdot 5^{2x-1}-(a-5)5^{x-1}=1\Leftrightarrow 5a\cdot t^2-(a-5)t-1=0,\ t=5^{x-1}>0.$$

Коренями останнього квадратного рівняння при $a\ne 0$ є

$$t=\frac{a-5\pm\sqrt{(a-5)^2+20a}}{10a}=\frac{a-5\pm|a+5|}{10a}\in\{\frac{1}{5},-\frac{1}{a}\}.$$

Звідси, якщо $0<a\le 5$, то отримаємо, що рівняння має лише один корінь $x=0$. У випадку $a<0$ рівняння має два корені $x=0$, $x=1-\log_5|a|$ при $a\ne -5$.

Випадки $a=0$ і $a=-5$ перевіряються безпосередньо після підстановки цих значень у рівняння.

2. Нагадаємо, що цілою частиною $[x]$ дійсного числа а називається найбільше ціле число, яке не перевищує цього числа, а його дробовою частиною називається $\{x\}=x-[x]$, наприклад, $[-0,5]=-1,\{-0,5\}=0,5,[3,2]=3,\{3,2\}=0,2$. Довести, що для кожного натурального значення n ціла частина і дробова частина числа $\frac{a}{8}$, де $a=(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1})^3$, задовольняють співвідношення

$$\left[\frac{a}{8}\right]=n,\quad 0,125<\left\{\frac{a}{8}\right\}<0,5.$$

Розв'язок. Зауважимо, що

$$a=2n+1+3\sqrt[3]{n(n+1)}(\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1})>2n+1+6\sqrt{n^3}=8n+1.$$

Доведемо, що $a < 8n+4$. Маємо

$a < 8n+4 \Leftrightarrow 2n+1+3\sqrt[3]{n(n+1)}\sqrt[3]{a} < 8n+4 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{n(n+1)}\sqrt[3]{a}-6n < 3.$

Розглянемо $3b = 3\sqrt[3]{n(n+1)}\sqrt[3]{a}-6n$. Зауважимо, що

$$b = n \cdot f(1/n),$$

де $f(x) = (1+x)^{1/3}+(1+x)^{2/3}-2$. Зауважимо тепер, що $(1+x)^\alpha \leq 1+\alpha x$ для кожного $\alpha \in (0,1)$ і для всіх $x > 0$. Справді, розглянемо функцію $g(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$. Оскільки, $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha < 0$. Тому, функція $g(x)$ спадає при $x > 0$. Отже, $g(x) < g(0) = 0$ для всіх $x > 0$. Тобто, отримуємо бажану нерівність. За допомогою цієї нерівності отримуємо

$$f(x) < 1+\frac{x}{3}+1+\frac{2x}{3}-2 = x,$$

тому $b < n\frac{1}{n} = 1$ і, отже, $a < 8n+4$. Остаточно отримуємо

$$n+\frac{1}{8} < \frac{a}{8} < n+\frac{4}{8}.$$

3. Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 числа, що належать до проміжку $[0,1]$. Довести, що

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq (1+x_1)(1+x_2)\cos\frac{\pi x_3}{4}\cos\frac{\pi x_4}{4}+(1-x_1)(1-x_2)\sin\frac{\pi x_3}{4}\sin\frac{\pi x_4}{4} \leq 4.$$

Розв'язок. Позначимо

$$a = (1+x_2)\cos\frac{\pi x_3}{4}\cos\frac{\pi x_4}{4}, \quad b = (1-x_2)\sin\frac{\pi x_3}{4}\sin\frac{\pi x_4}{4}.$$

Зрозуміло, що тоді $a \geq b$ для будь-яких $x_2, x_3, x_4 \in [0,1]$. Нехай $f(x) = a(1+x)+b(1-x)$. Оскільки,$f'(x) = a-b \geq 0$, то функція $f(x)$ зростає на проміжку $[0,1]$, а, отже, $a+b = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 2a$ для всіх $x \in [0,1]$. Залишається, з одного боку, зауважити, що $a \leq 2$, а, з іншого боку, для оцінки знизу суми $a+b$ застосувати ті ж міркування до функції $f_1(x) = a_1(1+x)+b_1(1-x)$ з $a_1 = \cos\frac{\pi x_3}{4}\cos\frac{\pi x_4}{4}, \quad b_1 = \sin\frac{\pi x_3}{4}\sin\frac{\pi x_4}{4}$. Тому,

$$a+b \geq f_1(0) = a_1+b_1 = \cos\left(\frac{\pi x_3}{4}-\frac{\pi x_4}{4}\right) = \cos\frac{\pi|x_3-x_4|}{4} \geq \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

позаяк, $|x_3 - x_4| \leq 1$.

4. Нехай $a,\ b,\ c$ — довжини сторін деякого трикутника, а $m_a,\ m_b,\ m_c$ — довжини його медіан, проведених до сторін $a,\ b,\ c$, відповідно. Довести, що
$$m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 = \frac{9}{16}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Розв'язок. Скориставшись двічі теоремою косинуса відносно кутів φ та $\pi - \varphi$, які утворює медіана m_a зі стороною a, отримуємо
$$\begin{cases} b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a\frac{a}{2}\cos\varphi, \\ c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2m_a\frac{a}{2}\cos(\pi - \varphi). \end{cases}$$

Додавши дві останні нерівності отримаємо
$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow b^2 = -c^2 + 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Записуючи подібні рівності для двох інших сторін
$$a^2 = -b^2 + 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}, \quad c^2 = -a^2 + 2m_b^2 + \frac{b^2}{2},$$

підносячи останні ці три рівності до квадрату і додаючи їх отримаємо потрібну рівність.

5. Довести, що для будь-якого не гострокутного трикутника і його більшої сторони a виконується нерівність
$$2 < \frac{h_a}{r} \leq 1 + \sqrt{2 + \cos\alpha},$$

де r — радіус вписаного кола, h_a — висота, проведена до сторони a, α — кут, який розташований навпроти сторони a.

Розв'язок. Нехай b, c — довжини двох інших сторін трикутника. Площа трикутника
$$S = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{h_a}{r} = \frac{a+b+c}{a}.$$

За нерівністю трикутника $b + c > a$, тому
$$\frac{h_a}{r} > \frac{a+a}{a} = 2.$$

Оскільки, $b^2+c^2 \geq 2bc$ і $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha \geq b^2+c^2 \geq 2bc$, позаяк $\cos\alpha \leq 0$, то $(b+c)^2 = b^2+c^2+2bc = a^2+2bc(1+\cos\alpha) \leq a^2(2+\cos\alpha)$, звідки

$$b+c \leq a\sqrt{2+\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{h_a}{r} \leq \frac{a+a\sqrt{2+\cos\alpha}}{a} = 1+\sqrt{2+\cos\alpha}.$$

6. Довести, що для кожного ірраціонального значення параметра **a** рівняння

$$\cos 2ax + 4\sin ax + 4\cos x - 2\cos^2 x - 5 = 0$$

не має коренів.

Розв'язок. Припустимо, що рівняння має корені для деякого ірраціонального значення параметра. Зауважимо, що $\cos 2ax = 1 - 2\sin^2 ax$, тому рівняння переписується у вигляді

$$(1-\sin ax)^2 + (1-\cos x)^2 = 0, \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} \cos x = 1; \\ \sin ax = 1. \end{cases}$$

Отже, $\begin{cases} x = 2\pi k, & k \in \mathbb{Z}, \\ ax = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$ звідки, $a = \frac{4n+1}{4k}$, тобто, якщо розв'язок існує, то a є раціональним числом. Суперечність.