

## Математичний бій 2, середня ліга, група В

1. У клітинках квадратної таблиці  $5 \times 5$  розташовано числа так, що в кожному рядку та в кожному стовпчику сума всіх чисел ціла. Також відомо, що сума всіх чисел в таблиці дорівнює 11. Доведіть, що у деякій клітинці стоїть число, що не менше за  $\frac{3}{5}$ .

2. Дано різні дійсні числа  $a$  і  $b$  такі, що рівняння

$$(x^2 + 20ax + 10b)(x^2 + 20bx + 10a) = 0$$

не має дійсних коренів. Доведіть, що число  $20(b - a)$  не може бути цілим.

3. Точка  $P$  – середина сторони  $BC$  квадрата  $ABCD$ . На стороні  $AD$  обрано точки  $Q$  та  $R$  так, що  $4AQ = 4DR = AD$ . Знайдіть суму кутів  $ACQ$ ,  $BRP$  та  $ABQ$ .

4. Настя та Влад обрали по трьохзначному числу, потім кожен дописав до нього таке ж саме число. Далі, кожен з них виписав всі натуральні дільники шестизначного числа, яке він отримав. Доведіть, що не менш ніж 8 чисел в їх списках співпали.

5. Кожна з 55 учасниць жіночих зборів написала у скількох з присутніх вік (число повних років) не співпадає з її віком. Ви не повірите, але виявилося, що кожна з них написала саме свій вік у роках! Яка найбільша кількість різних чисел могла бути написана?

6. На дощі написано декілька нулей, одиниць та двійок. Дозволяється витерти дві нерівні цифри і замість них написати одну цифру, що відрізняється від стертих. У підсумку декількох таких операцій на дощі залишилась одна цифра. Доведіть, що вона не залежить від порядку, в якому відбувались дії.

7. Знайдіть найменше 2011-значне число  $n$  таке, що десятковий запис числа  $3n$  містить лише парні цифри.

8. У Насті є 24 олівця чотирьох різних кольорів, по 6 олівців кожного кольору. Вона роздала олівці шістьом дітям, по 4 олівця кожному. Влад не знає у якої дитини, які олівці. Яку найменшу кількість дітей необхідно обрати Владу, щоб у них напевно були олівці всіх чотирьох кольорів?

9. Нехай  $AL$  – бісектриса трикутника  $ABC$ . Відомо, що

$$\angle ABC = 2\angle ACB + \angle BAC.$$

Доведіть, що  $AB + CL = AC$ .

10. Послідовність натуральних чисел задається за наступним правилом:  $a_1 = 2$ , а при  $n \geq 2$  число  $a_n$  – найбільший простий дільник числа  $a_1a_2 \dots a_{n-1} + 1$ . Чи може у цій послідовності зустрітися число 5?